ք.Գյումրի 16.12.2016թ.

ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

12-ՐԴ ԴԱՍԱՐԱՆ

Խնդիր 1- 21 աղջիկներ և 21 տղաներ մասնակցում էին մաթեմատիկայի մրցույթի:

- Յուրաքանչյուր մասնակից լուծել է վեց առաջադրանքից ոչ ավել:
- Ցանկացած աղջկա և տղայի համար կգտնվի գոնե մեկ առաջադրանք, որ լուծել են երկուսն էլ:

Ապացուցել, որ կար առաջադրանք, որը կատարել էին 3-ից ոչ պակաս աղջիկներ և երեքից ոչ պակաս տղաներ:

Լուծում- Ենթադրենք, որ գտնվել է խնդիր, որը լուծել են 2-ից ոչ ավել աղջիկներ կամ 2-ից ոչ ավել տղաներ: Կհամարենք առաջադրանքը «կարմիր», եթե այն լուծել են 2-ից ոչ ավել աղջիկներ և «սև» հակառակ դեպքում (այդ դեպքում լուծել են 2-ից ոչ ավել տղաներ): Պատկերացնենք շախմատի տախտակ 21 տողով, որոնցից յուրաքանչյուրը համապատասխանում է մեկ աղջկա և 21 սյունով,որոնցից յուրաքանչյուրը համապատասխանում է մեկ տղայի: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր վանդակը համապատասխանում է մեկ զույգի՝ «տղա-աղջիկ»:Յուրաքանչյուր վանդակ ներկենք որևէ առաջադրանքի գույնով, որը լուծել են և տղա-տողը և աղջիկ-սյունը: Դիրիխլեյի սկզբունքի համաձայն որևէ սյունում կգտնվի 11 սև վանդակ, կամ որևէ տողում կգտնվի 11 կարմիր վանդակ (քանի որ հակառակ դեպքում կստացվի, որ ընդհանուր վանդակների քանակը ավելի չէ քան $21\cdot10+21\cdot10<21^2$):

Դիտարկենք օրինակ աղջիկ-տողին, որը պարունակում է գոնե 11 սև վանդակ: Այդ վանդակներից յուրաքանչյուրին համապատասխանում է խնդիր, որը լուծվել է ամենաշատը 2 տղաների կողմից: Այդ դեպքում մենք կարող ենք մատնանշել 6 տարբեր խնդիրներ, որոնք լուծվել են այդ աղջկա կողմից; Առաջին պայմանի համաձայն աղջիկը ոչ մի ուրիշ խնդիր չի լուծել, բայց այդ դեպքում ամենաշատը 12 տղաներ ունեն ընդհանուր լուծած խնդիր այդ աղջկա հետ, որը հակասում է երկրորդ պայմանին:

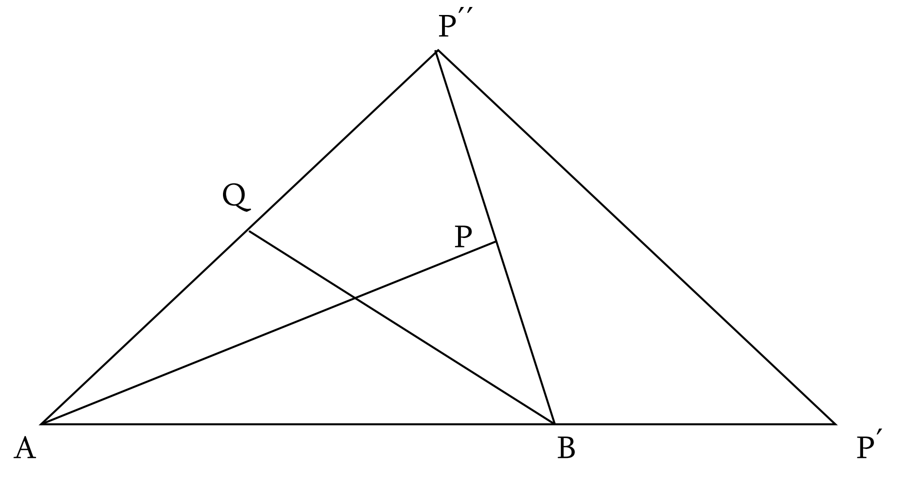
Նույն կերպ մեկնաբանվում է այն դեպքը, եթե որևէ սյունում գտնվեն 11 կարմիր վանդակներ:

Խնդիր 2- ABC եռանկյան մեջ տարված են AP և BQ անկյան կիսորդները: Հայտնի է, որ <BAC=60° և AB+BP=AQ+QB: Ինչպիսի՞ն կարող են լինել ΔABC եռանկյան անկյունները:

Լուծում- Նշանակենք եռանկյան անկյունները α=<A=60°, β=<B և γ=<C:

Շարունակենք AB կողմը մինչև P′ կետը այնպես, որ BP′=BP և կառուցենք P′′ կետը AQ-ի շարունակության վրա այնպես, որ AP′′=AP′: Այդ դեպքում ΔBP′P կլինի համապատասխան եռանկյան հիմքին առընթեր $\frac{\beta}{2}$ անկյուններով:

Քանի որ AQ+QP′′=AB+BP′=AB+BP=AQ+QB այստեղից հետևում է, որ QP′′=QB Հաշվի առնելով, որ ΔAP′P′′ հավասարակողմ է, իսկ AP-ն A անկյան կիսորդը, կստանանք PP′= PP′′: Ապացուցենք, որ B, P և P′′ կետերը ընկած են մի ուղղու վրա (որը նշանակում է, որ P′′ կետը համընկնում է C կետի հետ): Ենթադրենք, որ դա այդպես չէ, այսինքն ΔBPP′′ եռանկյունը գոյություն չունի: Այդ դեպքում <PBQ=<PP′B=<PP′′Q=β/2, իսկ <QP′′B=<QBP′′: Նշանակում է <PP′′B=<PBP′′, այսինքն BP=PP′′: Այդ դեպքում ΔBPP′′ եռանկյունը հավասարակողմ է, բայց դրանից էլ հետևում է, որ β/2=60 և նշանակում է, որ α+β=60°+120°=180°: Հակասություն: Քանի որ ΔBCA եռանկյունը հավասարասրուն է, ապա 120-β=γ=β/2 այդ պատճառով β=80°, γ=40°:



Խնդիր 3- Դիցուք a,b,c,d- ամբողջ թվեր են, այնպիսիք, որ $a>b>c>d>0$ և $ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c)$: Ապացուցել, որ $ab+cd$ թիվը բաղադրյալ է:

Լուծում- Ենթադրենք որ $ab+cd$-թիվը պարզ է: Նկատենք որ $ab+cd=(a+d)c+(b-c)a=m\cdot$ԱԸԲ$_{\text{ամ.}}(a+d,b-c)$, որևէ բնական m-ի համար: Ըստ պայմանի կամ $m=1$ կամ ԱԸԲ$_{\text{ամ.}}(a+d,b-c)=1$: Քննարկենք այս դեպքերը առանձին- առանձին:

I դեպք: $m=1$: Այդ դեպքում՝

ԱԸԲ$_{\text{ամ.}}(a+d,b-c)=ab+cd> ab+cd-(a-b+c+d)=(a+d)(c-1)+(b-c)(a+1)\geq$ԱԸԲ$_{\text{ամ.}}(a+d,b-c)$, որը ճիշտ չէ:

II դեպք: ԱԸԲ$_{\text{ամ.}}(a+d,b-c)=1$: Տեղադրելով $ac+bd=(a+d)b-(b-c)a$ տրված պայմանի ձախ մասում կստանանք $ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c)(a+d)(a-c-d)=(b-c)(b+c+d)$, որը նշանակում է, որ կգտնվի այնպիսի k բնական թիվ, որ

$a-c-d=k(b-c)$

$b+c+d=k(a+d)$

գումարելով այս հավասարությունները կստանանք՝

$a+b=k(a+b-c+d)$

և հետևաբար՝

$k(c-d)=(k-1)(a+b)$

Քանի որ $a>b>c>d$: Եթե $k=1$, ապա $c=d$, որը հակասում է: Եթե $k\geq 2$, ապա

$2\geq \frac{k}{k-1}=\frac{a+b}{c-d}>2$,

որը նույնպես հակասում է:

Երկու դեպքում էլ ստացվեց հակասություն, նշանակում է $ab+cd$ բաղադրյալ է ք.Գյումրի 16.12.2016թ.

Խնդիր 4 - ω_1 և ω_2 շրջանները հատվում են A և B կետերում, M-ը AB հատվածի միջնակետն է: AB ուղղի վրա ընտրված են S_1 և S_2 կետերը: S_1 կետից տարված շոշափողները շոշափում են ω_1 շրջանագիծը X_1 և Y_1 կետերում, իսկ S_2 -ից տարված շոշափողները շոշափում են ω_2 շրջանագիծը X_2 և Y_2 կետերում: Ապացուցել, որ եթե X_1X_2 ուղիղն անցնում է M կետով, ապա Y_1Y_2 ուղիղը նույնպես կանցնի M կետով:

Լուծում – Նշանակենք շրջանագծերի կենտրոնները O_1 և O_2: Նկատենք, որ

$$\angle S_1X_1O_1 = \angle S_1MO_1 = 90^0$$

Հետևաբար $S_1X_1O_1M$ կետերը ընկած են մի շրջանագծի վրա և

$$\angle(O_1M, MX_1) = \angle(O_1S_1, S_1X_1)$$

Քանի որ S_1X_1 և S_1Y_1 O_1 կենտրոնով շրջանագծի շոշափողներն են, կստանանք որ $\angle(O_1S_1, S_1X_1) = \angle(Y_1S_1, S_1O_1)$ նման ձևով $\angle S_1X_1O_1 = \angle S_1MO_1 = 90^0$

Հետևաբար S_1, Y_1, O_1, M ընկած են նույն շրջանագծի վրա և

$$\angle(Y_1S_1, S_1O_1) = \angle(Y_1M_1, MO_1)$$

Կստանանք, որ $\angle(O_1, M, MX_1) = \angle(Y_1M, MO_1)$

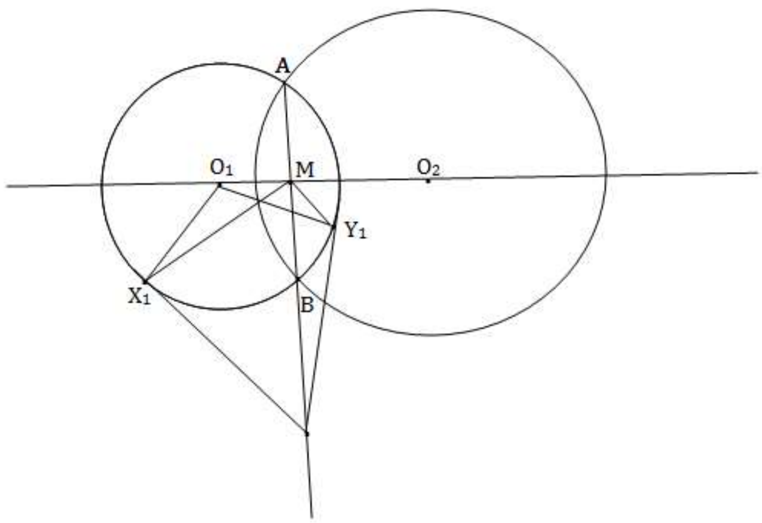
Կիրառելով նույն դատողությունները S_2, X_2, Y_2 կետերի համար հեշտ է ստանալ, որ $\angle(O_2, M, MX_2) = \angle(Y_2M, MO_2)$

Ըստ պայմանի M, X_1, X_2 ընկած են նույն ուղղի վրա:

Բացի դրանից O_1, O_2, M նույնպես ընկած են նույն ուղղի վրա, հետևաբար

$$\angle(Y_1M_1, MO_1) = \angle(O_1M, MX_1) = \angle(O_2M, MX_2) = \angle(Y_2M, MO_2)$$

որտեղից ստացվում է, որ M, Y_1, Y_2 կետերը ընկած են նույն ուղղի վրա:



Խնդիր 5- Ապացուցել, որ 100000 հաջորդական հարյուրանիշ թվերի մեջ կգտնվի այնպիսի մի n թիվ, որ $\frac{1}{n}$ թվի տասնորդական գրառման պարբերության երկարությունը մեծ կլինի 2011-ից:

Լուծում- Ենթադրենք հակառակը: Ինչպես հայտնի է, եթե սովորական անկրճատելի $\frac{m}{n}$ կոտորակը հանդիսանում է T պարբերությամբ տասնորդական կոտորակ, ապա $n=2^a.5^bd$, որտեղ d-ն (10^T-1)-ի բաժանարարն է:

Այդ պատճառով, եթե մեր թվերի յուրաքանչյուրի պարզ արտադրիչների վերլուծությունից հեռացնենք բոլոր 2-ները և 5-երը, ապա մնացած թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը պետք է բաժանի հատնյալ արտադրյալը

$$\Pi=(10'-1)(10^{2011}-1)$$

Մենք կապացուցենք , հակառակը, որ այդ ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը չի բաժանի Π, եթե նույնիսկ նրանից հեռացնենք 100000-ից բոլոր պարզ արտադրիչները:

Ակնհայտ է, ոչ մի 100000-ից մեծ ոչ մի պարզ թիվ չի կարող հանդիսանալ մեր 100000 թվերից երկուսի բաժանարարը: Յուրաքանչյուր p<100000 պարզ թվի համար դիտարկենք մեր թվերից այն, որը բաժանվում է իր ամենամեծ աստիճանին (եթե այդպիսի թվերը շատ են, կվերցնենք նրանցից ցանկացածը): Ջնջենք նրանց մեր ընտրության շարքից, իսկ մնացած 99999 թվերից ջնջենք բոլոր պարզ արտադրիչները, որոնք հավասար են p: Դրանից հետո մնացած թվերը կլինեն փոխադարձաբար պարզ (քանի որ 100000-ից փոքր պարզ բաժանարարներ նրանցում չեն մնա) և կբաժանեն Π (քանի որ մասնավորապես 2 և 5 բաժանարարները չեն մնա):

Նշանակում է, որ Π պետք է բաժանվի նրանց արտադրյալի վրա, որը ինչպես կտեսնենք, կլինի շատ մեծ դրա համար:

Աստիճանը, որով p թիվը մասնակցում է բոլոր թվերի արտադրյալի մեջ, բացի դրանից, որը պարունակվում է նրա ամենամեծ աստիճանի մեջ, չի անցնում աստիճանը, որը p-ն մասնակցում է 99999! թվի մեջ:

Իրոք, եթե K հատ թվեր մնացածների մեջ փոքր են քննարկվողից և ℓ թվեր մեծ են նրանից (k+ℓ=99.999) ապա P^m –ին բազմապատիկ նրանց մեջ կլինեն

$$\left[\frac{k}{P^m}\right]+\left[\frac{\ell}{P^m}\right]\le\left[\frac{99999}{P^m}\right]$$

այսինքն ոչ ավել, քան 1-ից մինչև 99999 թվերի միջև:

Այդ պատճառով էլ, եթե յուրաքանչյուր $p<100000$ պարզ թվի համար 100000 հատ հարյուրանիշ թվերի արտադրյալից հեռացնենք այն թվերը, որոնք բաժանվում են p-ի ամենամեծ աստիճանի վրա, իսկ հետո մնացած թվերի պարզ արտադրիչների վերլուծությունից հեռացնենք p-ին հավասար արտադրիչները, ապա այդ արտադրիչներից կվերանան (100000-ը չգերազանցող պարզ թվերը կեսից ոչ ավել են), և մնացածների արտադրյալը կբաժանվի ոչ ավել քան 99999! –ի վրա:

Այդ պատճառով մնացող արտադրյալը կլինի մեծ

$$\frac{\left(10^{99}\right)^{100000}}{\left(10^{100}\right)^{50000}\cdot 99999!}>\frac{10^{4900000}}{100000^{100000}}>10^{4400000}$$

Մյուս կողմից, այդ արտադրյալը պետք է բաժանի Π թիվը, որը փոքր է քան $10^{1+2+\ldots+2011}<10^{2500000}$, որը հակասություն է: