Կորյուն Առաքելյան
Հայկազն Նավասարդյան
Արման Սարգսյան

Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա

ԽՈՐԱՑՎԱԾ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

10-րդ դասարան

Երևան 2016

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻՆ ԱՌԸՆԹԵՐ ԱՐՏԱՇԵՍ ՇԱՀԻՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՖԻԶԻԿԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՏՈՒԿ ԴՊՐՈՑ

Ձեռնարկը համապատասխանեցված է ԿԳ նախարարության կողմից հաստատված մաթեմատիկայի մասնագիտացման ուղղվածության ծրագրին

Նախաբան

Մաթեմատիկական կրթությունը և մաթեմատիկական մտածելակերպն անհրաժեշտ են ոչ միայն նրանց, ովքեր հետագայում կզբաղվեն մաթեմատիկայով կամ գիտական որևէ հետազոտությամբ, այլ նաև բոլոր նրանց, ովքեր կաշխատեն ժողովրդական տնտեսության տարբեր բնագավառներում:

Կրթության գործընթացում մաթեմատիկական խնդիրներն ունեն ուսուցողական, գործնական և դաստիարակչական նշանակություն: Նրանք զարգացնում են սովորողների ալգորիթմական, տրամաբանական մտածողությունը, մշակում մաթեմատիկան կիրառելու գործնական հմտություններ, ձևավորում աշխարհայացք: Խնդիրների լուծումը նրանց մղում է ստեղծագործական աշխատանքի:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասագրքերում զետեղված խնդիրները, որպես կանոն, նպատակաուղղված են տվյալ թեմայի տեսական նյութի յուրացմանը: Սահմանափակվելով միայն դասագրքում ընդգրկված խնդիրներով՝ սովորողների մոտ կարող են ձևավորվել միայն սերտողական բնույթի գիտելիքներ: Միօրինակ կամ միայն ալգորիթմական խնդիրները չեն կարող ապահովել սովորողների մտավոր զարգացմանը ներկայացվող պահանջներին:

Մաթեմատիկայի նկատմամբ հակումներ ունեցող սովորողները չեն բավարարվում մաթեմատիկայի դասերին ստացած գիտելիքներով, հետևաբար և ցանկություն է առաջանում ավելի շատ տեղեկություն ստանալ իրենց սիրած առարկայի մասին, իմանալ, թե ինչպես է այն կիրառվում կյանքում, լուծել հետաքրքիր և ավելի բարդ խնդիրներ:

Սույն ձեռնարկում ընդգրկված նյութերը կարող են նպաստել մաթեմատիկական գիտելիքների ընդլայնմանը, ծրագրային նյութը խորությամբ յուրացնելուն, տրամաբանական մտածողության զարգացմանը, հետազոտական ունակությունների ձևավորմանը, ինչպես նաև՝ մաթեմատիկական խոսքի կուլտուրայի զարգացմանը:

Գիրքը նախատեսված է մասնագիտացված դպրոցների, բնագիտամաթեմատիկական թեքումով 10-րդ դասարանի սովորողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցիչներին՝ արտադասարանական պարապմունքներ անցկացնելու, ինչպես նաև աշակերտներին՝ մաթեմատիկական օլիմպիադաներին նախապատրաստվելու համար:

§ 1. ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆ: ԵՆԹԱԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏ

Ընդհանուր տեղեկություններ

1. Բազմություն

Բազմության և նրա **տարրերի** հասկացությունները մաթեմատիկայում սկզբնական (նախնական) հասկացություններ են: Բազմությունը կարող է ընկալվել որպես առարկաների (օբյեկտների) հավաքածու (համախմբություն): Օրինակ, կարելի է խոսել դահլիճում գտնվող մարդկանց բազմության մասին, անտառում եղած կեչիների բազմության մասին, բնական թվերի բազմության մասին, տրված հատվածի կետերի բազմության մասին: Դահլիճի մարդիկ, անտառի կեչիները, բնական թվերը, հատվածի կետերը հանդիսանում են համապատասխան բազմության տարրերը:

Բազմությունները, սովորաբար, նշանակում են մեծատառերով՝ A, B, C, X,…, իսկ նրանց տարրերը՝ փոքրատառերով՝ a, b, c, x և այլն: Որոշ, առավել կարևոր բազմությունների համար ընդունված են ավանդական նշանակումներ. ինչպես, օրինակ, N, Z, Q, R տառերով նշանակվում են, համապատասխանաբար, բնական, ամբողջ, ռացիոնալ, իրական թվերի բազմությունները:

Այն փաստը, որ a **օբյեկտը** A **բազմության տարր է**, գրառվում է այսպես՝ $a \in A$ և կարդացվում՝ «a-ն պատկանում է A բազմությանը» կամ «a-ն գտնվում է A բազմության մեջ»: $b \notin A$ (կամ $b \,\overline{\in}\, A$) գրառումը նշանակում է՝ b-ն չի պատկանում A բազմությանը (կամ՝ b-ն A բազմության տարր չէ): Օրինակ,

$$3 \in \mathrm{N}, \quad -7 \notin \mathrm{N}, \quad \frac{3}{17} \in \mathrm{Q}, \quad \sqrt{3} \notin \mathrm{Q}, \quad \pi \in \mathrm{R}:$$

Տարբերվում են **վերջավոր** և **անվերջ** բազմություններ:

Վերջավոր է կոչվում այն բազմությունը, որը բաղկացած է վերջավոր թվով տարրերից: Եթե բազմությունը վերջավոր չէ, ապա այն անվանում են **անվերջ** բազմություն:

Ընդհանուր առմամբ, բազմությունների տրման երկու հիմնական եղանակ կա:

1) Բազմությունը տրվում է նրա բոլոր **տարրերի թվարկումով** (կամ՝ տարրերի ցանկով): Այդ դեպքում, սովորաբար, բազմության տարրերն առնվում են ձևավոր փակագծերի մեջ, որտեղ գրության կարգը (տարրերի հերթականությունը) դեր չի խաղում: Օրինակ, միանիշ պարզ թվերի բազմությունն է՝ {2; 3; 5; 7}, իսկ a, b, c, d չորս տարրերից կազմված բազմությունը գրառվում է այսպես՝ {a; b; c; d}, կամ այսպես՝ { c; a; d; b}, կամ՝ {d; b; a; c} և այլն: Ակնհայտ է, որ տարրերի թվարկումով կարող են տրվել միայն վերջավոր բազմությունները:

2) Նշվում է դիտարկվող բազմության տարրերը բնութագրող որոշակի հատկություն, որով օժտված են տվյալ բազմության բոլոր տարրերը և միայն նրանք (այսինքն՝ ուրիշ օբյեկտներ օժտված չեն այդ հատկությամբ): Այդպիսի հատկությունը կոչվում է բազմության **բնութագրիչ հատկություն**:

Այն փաստը, որ A բազմությունը տրված է P հատկությամբ, հակիրճ գրառվում է այսպես՝

$$A=\left\{x \,\middle|\, P(x)\right\}:$$

Այն կարդացվում է այսպես՝ A բազմությունը բաղկացած է այն և միայն այն x տարրերից, որոնք օժտված են P հատկությամբ: Օրինակ,

$$A=\left\{x \,\middle|\, (3x-2)^2 \le 9\right\}$$

գրառումը նշանակում է, որ A բազմությունը կազմված է բոլոր այն և միայն այն x թվերից, որոնք բավարարում են $(3x-2)^2 \le 9$ անհավասարությանը:

$B=\{x \mid$ x-ը եվրոպական պետության մայրաքաղաք է $\}$ գրառումով տրվում է եվրոպական բոլոր պետությունների մայրաքաղաքների բազմությունը:

Հաճախ տվյալ հատկությունը ձևակերպվում է բառերով: Այսպես, օրինակ, հանդեսին մասնակցող տասներորդցիների բազմությունը,

$x^3 - x = 0$ հավասարման լուծումների բազմությունը, անկյան ներսում գտնվող և նրա կողմերից հավասարահեռ կետերի բազմությունը:

Երբեմն բազմությունը տրվում է այնպիսի հատկությամբ, որով, ընդհանրապես, օժտված չէ և ոչ մի օբյեկտ: Օրինակ, $x^2 + 1 = 0$ հավասարման լուծումների բազմությունը այն ուղղանկյուն եռանկյունների բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի կողմերի երկարությունները կենտ թվեր են: Հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ այդպես սահմանված բազմությունները ոչ մի տարր չեն պարունակում: Ոչ մի տարր չպարունակող բազմությունն անվանում են **դատարկ** բազմություն. այն նշանակվում է $\varnothing$ պայմանանշանով:

A և B բազմությունները կոչվում են **հավասար**, եթե նրանք կազմված են միևնույն տարրերից: Այդ դեպքում գրում են՝ $A = B$:

Օրինակ, եթե $A = \{2,5,8\}$ և $B = \{5,8,2\}$, ապա $A = B$, իսկ եթե $C = \{0,1,5\}$ և $D = \{0,1,5,9\}$, ապա $C \neq D$:

2. Ենթաբազմություն

Յուրաքանչյուր վագր գիշատիչ կենդանի է, յուրաքանչյուր ամբողջ թիվ պատկանում է ռացիոնալ թվերի բազմությանը, յուրաքանչյուր զուգահեռագիծ պատկանում է բոլոր քառանկյունների բազմությանը, [1; 3] հատվածի ցանկացած կետ (0; 4) միջակայքի կետ է:

Եթե A բազմության յուրաքանչյուր տարր պատկանում է նաև B բազմությանը, ապա A բազմությունը կոչվում է B բազմության **ենթաբազմություն:**

Այն փաստը, որ A բազմությունը B բազմության ենթաբազմություն է, գրառվում է այսպես՝ $A \subset B$ կամ $B \supset A$: Այդ դեպքում ասում են՝ A բազմությունը **պարունակվում է** B բազմությունում կամ B բազմությունը **պարունակում է** A բազմությունը:

Այսպիսով, վերևում բերված մասնավոր պնդումները բազմությունների «լեզվով» կարելի է մեկնաբանել այսպես. բոլոր վագրերի բազմությունը գիշատիչ կենդանիների բազմության ենթաբազմություն է, ամբողջ թվերի բազմությունը ռացիոնալ թվերի բազմության ենթաբազմություն է, այսինքն՝ $Z \subset Q$, $[1;3]$ հատվածը $(0;4)$ միջակայքի ենթաբազմություն է՝ $[1;3] \subset (0;4)$:

Ընդունված է դատարկ բազմությունը համարել ցանկացած բազմության ենթաբազմություն:

Եթե A բազմությունում կա **գոնե** մեկ տարր, որը չի պատկանում B բազմությանը, ապա A-ն **չի հանդիսանում** B-ի ենթաբազմություն՝ $A \not\subset B$:

Օրինակ, $2k$, $k \geq 0$, $k \in Z$, տեսքի թվերի բազմությունը N-ի ենթաբազմություն չէ, քանի որ $0 \notin N$:

A **և** B **բազմությունները հավասար են այն և միայն այն դեպքում, երբ** A**-ն** B**-ի ենթաբազմություն է և** B**-ն՝** A**-ի ենթաբազմությունը,** այսինքն՝ $A \subset B$ և $B \subset A$:

Երբեմն E բազմության որևէ M ենթաբազմություն առանձնացնելու համար մատնանշվում է M բազմության տարրերին (և միայն դրանց) վերաբերող որևէ p հատկություն (M բազմության տարրերը բնութագրող հատկություն): Այդ դեպքում գրում են՝

$$M = \{x \in E \mid p\},$$

որը նշանակում է՝ M **բազմությունը բաղկացած է** E **բազմության այն և միայն այն տարրերից, որոնք օժտված են** p **հատկությամբ:**

Օրինակ,

$$M = \{x \in Q \mid 0 < x < 1\}$$

գրությունը նշանակում է, որ M-ը 0-ի և 1-ի միջև ընկած բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմությունն է:

Հնարավոր է, որ E բազմության և ոչ մի տարր օժտված չէ p հատկությամբ: Այդ դեպքում $\{x \in E \mid p\}$ ենթաբազմությունը չի պարունակում E բազմության և ոչ մի տարր և կոչվում է **դատարկ ենթաբազմություն:** Օրինակ,

$$\{x \in Z \mid 3x = 5\}, \quad \{x \in R_+ \mid x + x^3 = -3\}$$

ենթաբազմությունները հանդիսանում են, համապատասխանաբար, ամբողջ թվերի և դրական իրական թվերի բազմությունների դատարկ ենթաբազմություններ:

Բնական հարց է ծագում, քանի՞ ենթաբազմություն ունի n տարր պարունակող բազմությունը:

Դիտարկենք, օրինակ, երեք տարր պարունակող $\{a, b, c\}$ բազմության - բոլոր ենթաբազմությունները: Դրանք են՝ դատարկ բազմությունը $(\varnothing)$, մեկական տարր պարունակող ենթաբազմությունները՝ $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, երկուական տարր պարունակողները՝ $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ և երեքական տարր պարունակողները, որը միակն է՝ տրված բազմությունը՝ $\{a, b, c\}$: Այսպիսով, երեք տարր պարունակող բազմության ենթաբազմությունների թիվը 8-ն է: Ընդհանուր դեպքում ճիշտ է հետևյալ պնդումը. n **տարրերից կազմված բազմության բոլոր ենթաբազմությունների թիվը հավասար է** 2^n (տե՛ս, N 13 խնդիրը):

3. Գործողություններ բազմությունների հետ

1⁰. Բազմությունների հատումը: Բազմությունը, որը կազմված է բոլոր այն (և միայն այն) տարրերից, որոնք պատկանում են A և B բազմություններից յուրաքանչյուրին, կոչվում է A և B բազմությունների **հատում** և նշանակվում է՝ $A \cap B$:

Բազմությունները, պայմանականորեն, պատկերվում են հարթության վրա՝ շրջանի կամ ուղղանկյան տեսքով, որի շնորհիվ ավելի հստակ են լուսաբանվում բազմությունների հետ կատարվող գործողությունները: Նկար 1-ում ուրվագծորեն պատկերված է A և B բազմությունների հատումը (գծապատված պատկերն է):

Օրինակ: 1) Եթե $A = \{0; 3; 5; 7\}$ և $B = \{1; 3; 5; 8\}$, ապա $A \cap B = \{3; 5\}$:

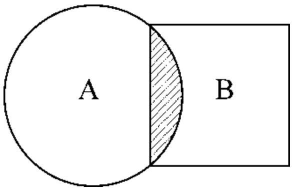
2) $Z \cap R = Z$:

3) $(0; 4]$ և $[0; 2]$ միջակայքերի հատումը (ընդհանուր մասը) $(0; 2]$ միջակայքն է:

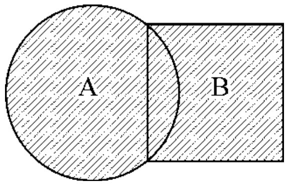
4) Բոլոր ուղղանկյունների բազմության և բոլոր շեղանկյունների բազմության հատումը բոլոր քառակուսիների բազմությունն է:

Եթե A և B բազմությունները չունեն ընդհանուր տարր, ապա ասում են, որ A և B բազմությունները **չեն հատվում** կամ՝ նրանց

հատումը դատարկ բազմություն է $(A \cap B = \varnothing)$: Օրինակ, բոլոր պարզ թվերի բազմության և 4-ի բազմապատիկ թվերի բազմության հատումը դատարկ է, $x^2 = 5$ հավասարման լուծումների բազմության և Q բազմության հատումը դատարկ է: Ակնհայտ է, որ ցանկացած A բազմության համար $A \cap \varnothing = \varnothing$:



Նկ. 1



Նկ. 2

2⁰. Բազմությունների միավորումը: Բազմությունը, որը կազմված է բոլոր այն (և միայն այն) տարրերից, որոնք պատկանում են A և B բազմություններից գոնե մեկին, կոչվում է A և B բազմությունների **միավորում** և նշանակվում է՝ $A \cup B$:

Օ ր ի ն ա կ : 1) *Եթե* $A = \{-1, 0, 4, 7\}$ *և* $B = \{2, 4, 7\}$, *ապա*

$$A \cup B = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$$ *:*

2) $Z \cup Q = Q$*:*

3) *Բոլոր հավասարասրուն եռանկյունների բազմության և բոլոր հավասարակողմ եռանկյունների բազմության միավորումը բոլոր հավասարասրուն եռանկյունների բազմությունն է:*

4) $(-\infty; 4]$ *և* $(0; 7]$ *թվային միջակայքերի միավորումը* $(-\infty; 7]$ *միջակայքն է:*

Միշտ չէ, որ հնարավոր է թվային երկու միջակայքերի միավորումը ներկայացնել թվային մեկ միջակայքով: Օրինակ, $[-2; 4]$ և $(5; +\infty)$ բազմությունների (դրանք չունեն ընդհանուր մաս) միավորումը թվային միջակայք չէ: Այս դեպքում, պարզապես, գրում են՝ $[-2; 4] \cup (5; +\infty)$:

2-րդ նկարում A և B բազմությունների միավորումը ներկայացնում է ամբողջ գծապատված պատկերը:

Ակնհայտ է, որ ցանկացած A բազմության համար $A \cup \varnothing = A$:

Հաճախ հարկ է լինում դիտարկել երեք և ավելի բազմությունների միավորումը և հատումը: Օրինակ, եթե

$A=[1;7]$, $B=[2;8]$ և $C=[-1;4]$, ապա

$(A \cup B) \cup C = [1;8) \cup [-1;4] = [-1;8)$,

$(A \cap C) \cup B = [-1;4] \cup [2;8) = [1;8)$:

Բազմության տրոհումը զույգ առ զույգ չհատվող ենթաբազմությունների, անվանում են տվյալ բազմության **դասակարգում**, իսկ ստացված ենթաբազմությունները՝ այդ դասակարգմանը համապատասխանող **դասեր**:

Օ ր ի ն ա կ 1: Բոլոր մարդկանց բազմությունը կարելի է տրոհել երկու խմբի՝ 1) մինչև 160 սմ հասակ ունեցողներ, 2) 160 սմ–ից բարձր հասակ ունեցողներ:

Օ ր ի ն ա կ 2: Բնական թվերի բազմությունը կարելի է տրոհել երեք դասի՝

$\{3k \mid k \in N\}$, $\{3k-1 \mid k \in N\}$, $\{3k-2 \mid k \in N\}$:

Օ ր ի ն ա կ 3: Բոլոր եռանկյունների բազմությունը կարելի է տրոհել երկու դասի՝

1) ուղղանկյուն եռանկյուններ, 2) ոչ ուղղանկյուն եռանկյուններ:

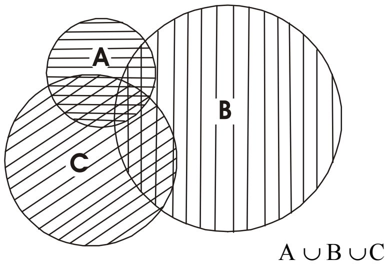
Օ ր ի ն ա կ 4: Հարթության մեջ գտնվող բոլոր բազմանկյունների բազմությունը կարելի է տրոհել անվերջ թվով դասերի, նրանց դասակարգելով ըստ կողմերի թվի՝ եռանկյուններ, քառանկյուններ, հնգանկյուններ և այլն:

A, B և C բազմությունների **միավորումը** մի բազմություն է, որը պարունակում է բոլոր այն և միայն այն տարրերը, որոնք պատկանում են A, B կամ C բազմություններից գոնե մեկին (նկ. 3):

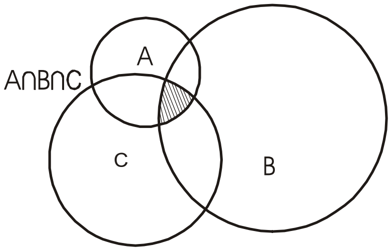
A, B և C բազմությունների **հատումը** բոլոր այն և միայն այն տարրերի բազմությունն է, որոնք պատկանում են A, B և C բազմություններից յուրաքանչյուրին (նկ. 4):

Օրինակ, հավասարասրուն եռանկյունների և անհավասարակողմ եռանկյունների բազմությունների միավորումը բոլոր եռանկյունների բազմությունն է:

Եթե A-ն $6n+1,\ n\in N$ տեսքի պարզ թվերի բազմությունն է, B-ն՝ $4n+3,\ n\in Z$ տեսքի թվերի բազմությունը, իսկ C-ն՝ 100-ը չգերազանցող դրական թվերի բազմությունը, ապա A, B և C բազմությունների հատումը $\{7; 19; 31; 43; 67; 79; 91\}$ բազմությունն է (համոզվեք դրանում):



Նկ. 3



Նկ. 4

Բազմությունների միավորումը և հատումը օժտված են թվերի գումարման և բազմապատկման հատկություններին համանման որոշ հատկություններով. օրինակ, **տեղափոխական, զուգորդական և բաշխական** հատկություններով:

Ստորև ներկայացված են այդ հատկություններն արտահայտող հավասարություններ. ձախ կողմում՝ բազմությունների, իսկ աջ կողմում՝ թվերի համար:

1. $A\cup B=B\cup A$, $a+b=b+a$:

2. $A\cap B=B\cap A$, $ab=ba$:

3. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(a+b)+c=a+(b+c)$:

4. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$, $(ab)\cdot c=a\cdot(bc)$:

5. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$, $(a+b)\cdot c=ac+bc$:

Սակայն միշտ չէ, որ տեղի ունի այդպիսի նմանություն: Օրինակ, բազմությունների համար, ակնհայտորեն, ճիշտ են

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A, \qquad (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

հավասարությունները, բայց

$$a + a = a, \qquad a \cdot a = a \qquad \text{և} \qquad (a+c)(b+c) = ab + c$$

թվային հավասարությունները նույնություններ չեն:

Վերջավոր A բազմության համար $m(A)$ -ով նշանակենք նրա տարրերի քանակը: Դատարկ բազմության տարրերի քանակը, ակնհայտորեն, հավասար է զրոյի:

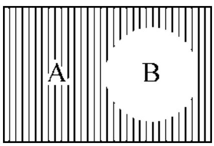
Ցանկացած վերջավոր A և B բազմությունների համար ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B):$$

Այս թեորեմի ապացուցումը դժվարություն չի ներկայացնում (ապացուցեք ինքնուրույն):

3⁰. Բազմությունների տարբերություն: Ենթաբազմության լրացում: Բազմությունը, որը կազմված է A բազմության բոլոր այն տարրերից (և միայն դրանցից), որոնք չեն պատկանում B բազմությանը, կոչվում է A և B բազմությունների **տարբերություն** և նշանակվում է՝ $A \setminus B$:

5-րդ նկարում ուրվագծորեն պատկերված են այնպիսի A և B բազմություններ, որտեղ B-ն A-ի ենթաբազմություն է: Գծապատված պատկերը B բազմության լրացումն է մինչև A բազմությունը:



Նկ. 5

Օ ր ի ն ա կ 1. եթե $A = \{1; 3; 5; 7\}$, $B = \{5; 7; 8; 9; 10\}$, ապա

$$A \setminus B = \{1; 3\}, \qquad B \setminus A = \{8; 9; 10\}:$$

Օ ր ի ն ա կ 2. եթե A բազմությունը 2-ից մեծ բոլոր իրական թվերի բազմությունն է, իսկ B-ն՝ 5-ից փոքր բոլոր իրական թվերի բազմությունն է, այսինքն՝

$$A=\{x\in R \mid x>2\}, \quad B=\{x\in R \mid x<5\},$$

ապա A և B բազմությունների տարբերությունը 5-ից ոչ փոքր բոլոր իրական թվերի բազմությունն է, իսկ B և A բազմությունների տարբերությունը 2-ից ոչ մեծ բոլոր իրական թվերի բազմությունն է, այսինքն՝

$$A \setminus B=\{x\in R \mid x\geq 5\}, \quad B \setminus A=\{x\in R \mid x\leq 2\}:$$

Եթե $A\subset B$, ապա $B\setminus A$ տարբերությունն անվանում են A բազմության **լրացում** մինչև B բազմությունը և նշանակում են A'_B:

Օրինակ, եթե $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b,c,d,e\}$, ապա $A'_B=\{d,e\}$ *: Եթե I-ն իռացիոնալ թվերի բազմությունն է, ապա* $Q'_R=I$ *(Q-ն և R-ը, համապատասխանաբար, ռացիոնալ և իրական թվերի բազմություններն են):*

Բազմության լրացման սահմանումից անմիջականորեն հետևում են հետևյալ հավասարությունները՝

$$A\cup A'_B=B, \quad A\cap A'_B=\varnothing, \quad (A'_B)'_B=A:$$

4⁰. *Դեկարտյան արտադրյալ:* *Եթե $a\in A$ և* $b\in B$*, ապա (a,b) տեսքով* գրված a և b տարրերի զույգն անվանում են **կարգավորված զույգ**, ընդ որում համարում են, որ $(a_1;b_1)$ և $(a_2;b_2)$ զույգերը **հավասար են** այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_1=a_2$ և $b_1=b_2$:

Բոլոր $(a;b)$ կարգավորված զույգերից բաղկացած բազմությունը, որտեղ $a\in A$ և $b\in B$, կոչվում է A և B բազմությունների **դեկարտյան արտադրյալ** և նշանակվում է $A\times B$:

Օրինակ, եթե $A=\{a,b\}$ և $B=\{b;c\}$, ապա

$$AxB=\{(a;b),(a;c),(b;b),(b;c)\},$$

$$BxA=\{(b;a),(b;b),(c;a),(c;b)\}:$$

Դեկարտյան արտադրյալը չի ենթարկվում տեղափոխական օրենքին:

$A \times B = B \times A$ հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $A = B$:

$A \times A$ արտադրյալն անվանում են **դեկարտյան քառակուսի** և նշանակում են A^2:

Օրինակ, R^2 դեկարտյան քառակուսին կոորդինատային հարթության բոլոր $(x; y)$ կետերի բազմությունն է:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. Դիցուք, A–ն պարզ թվերի բազմությունն է: Ճի՞շտ է արդյոք հետևյալ գրառումը.

ա) $29 \in A$,   բ) $101 \notin A$,   գ) $2017 \in A$ դ) $18711 \notin A$:

2. Դիցուք, B–ն $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ հավասարման արմատների բազմությունն է: Ճի՞շտ է արդյոք հետևյալ պնդումը.

ա) $0 \in B$,   բ) $1 \in B$,   գ) $4 \in B$,   դ) $5 \notin B$:

3. Նշել տրված բազմությանը պատկանող երեք տարր.

ա) $A = \{ \quad 1 | \quad \in Z \}$; ----------------------------------

բ) B-ն 100–ից մեծ պարզ թվերի բազմությունն է,

գ) M-ը շախմատի գծով աշխարհի բոլոր չեմպիոնների բազմությունն է:

4. Բնութագրիչ հատկությամբ տրված բազմությունը ներկայացնել նրա տարրերի թվարկումով.

ա) $A = \{ x | x^3 = 4x \}$;

բ) $B = \left\{ x \,\middle|\, x^2 < 7,\ \ x \in Z \right\}$;

գ) $C = \left\{ n \,\middle|\, 3{,}15 \le \pi n \le 15{,}75,\ \ n \in N \right\}$;

դ) $D = \left\{ \ \middle|\, \dfrac{3k+2}{k-1} = m;\ \ k \in Z,\ \ m \in Z \right\}$:

5. Բերել թվային A և B բազմությունների օրինակներ այնպես, որ՝

ա) $A \cup B = R$ և $A \cap B = \varnothing$; բ) $A \cup B = A$ և $A \cap B = B$:

6. Ապացուցել, որ՝ ա) $A \cup B = B$, բ) $A \cap B = A$ հավասարություն-ները ճիշտ են այն և միայն այն դեպքում, երբ $A \subset B$:

7. Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; բ) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$:

8. Գտնել՝ $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $(A \cup B) \cap C$

և այդ բազմությունները պատկերել կոորդինատային ուղղի վրա, եթե՝

ա) $A = [1;5],\ \ B = [3;7),\ \ C = (-1;1]$;

բ) $A = [-1;4],\ \ B = [6;+\infty),\ \ C = (-\infty;0)$:

9. Դիցուք, $A = \{x \in N \mid 2 < x \le 6\}$, $B = \{x \in N \mid 1 < x < 4\}$, $C = \{x \in N \mid x^2 - 4 = 0\}$: Ի՞նչ տարրերից է բաղկացած հետևյալ բազմությունը.

ա) $B \cup C$; բ) $A \cap B \cap C$; գ) $A \cup B \cup C$;

դ) $(A \cap B) \cup (B \cup C)$; ե) $B \times C$; զ) $C \times B$:

10. Երկնիշ թվերի բազմությունից առանձնացնել $6k+1\ (k \in N)$ տեսքի պարզ թվերի բազմությունը:

11. Տրված բազմությունները դասավորել այնպես, որ յուրաքանչյուր բազմությունը լինի հաջորդի ենթահաջորդականությունը.

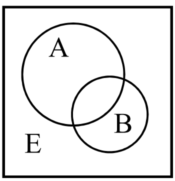
ա) N – բնական բոլոր թվերի բազմությունը,
A – բոլոր կենտ թվերի բազմությունը,
B – 4k–1 տեսքի բոլոր թվերի բազմությունը $(k \in N)$
R_+ – բոլոր դրական իրական թվերի բազմությունը:

բ) A – բոլոր բազմանկյունների բազմությունը,
B – բոլոր զուգահեռագծերի բազմությունը,
C – բոլոր քառանկյունների բազմությունը,
D – բոլոր շեղանկյունների բազմությունը:

12. Քանի՞ ենթաբազմություն ունի n տարրից կազմված բազմությունը, եթե՝ ա) $n=5$, բ) $n=7$:

13*. Ապացուցել հետևյալ թեորեմը՝ n **տարրից կազմված բազմության բոլոր ենթաբազմությունների քանակը հավասար է** 2^n -ի:

14. A և B բազմությունները հանդիսանում են E բազմության ենթաբազմություններ (նկ. 6): Նկարի վրա գծապատել հետևյալ բազմույունը.



Նկ.6

ա) $A \cup B'$; բ) $A' \cap B$;
գ) $(A \cup B)'$; դ) $(A \cup B')'$;
ե) $(A \cap B)'$; զ) $(A' \cap B) \cup (A \cap B')$:

15. Դիցուք, $A=\{3n-1 \mid n \in N\}$ և $B=\{4n+3 \mid n \in N\}$: Գտնել $A \cap B$ -ն:

16. Գտնել թվային A և B բազմությունների միավորումը, եթե A-ն՝ $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$, տեսքի թվերի բազմությունն է, իսկ B-ն՝ $\frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$, տեսքի թվերի բազմությունն է:

17. Դասարանի 22 աշակերտներից 14-ը զբաղվում է լողով, 10-ը մասնակցում է մաթեմատիկայի արտադասարանական պարապմունքներին: Քանի՞ աշակերտ է մասնակցում և՛ լողի, և՛ մաթեմատիկայի պարապմունքներին, եթե դասարանում չկա աշակերտ, որ չմասնակցի այդ պարապմունքներից գոնե մեկին:

18. Դասարանում սովորում են 30 աշակերտ: Էքսկուրսիայի ժամանակ 23 աշակերտ գնացին թանգարան, 21 աշակերտ՝ կինո, 5 աշակերտ չգնացին ո՛չ կինո և ո՛չ էլ՝ թանգարան: Քանի՞ աշակերտ գնացին և՛ թանգարան, և՛ կինո:

19. Մեր դասարանում կա 24 աշակերտ: Նրանցից 15-ը սիրում են շներին, 12-ը՝ կատուներին, ընդ որում, 7 աշակերտ սիրում են և՛ շներին, և՛ կատուներին: Մեր դասարանցիներից քանի՞սը չեն սիրում ո՛չ շներին և ո՛չ էլ՝ կատուներին:

20. Մեր դասարանը բաղկացած է 30 աշակերտից: Էքսկուրսիայի ժամանակ թանգարան այցելեց 23 աշակերտ, կինո և թանգարան՝ 6 աշակերտ, իսկ 2-ը չգնացին ո՛չ կինո և ո՛չ էլ թանգարան: Մեր դասարանի քանի՞ աշակերտ գնաց կինո:

21. Դասարանի 25 աշակերտներից 12-ը հաճախում է մաթեմատիկական խմբակ, 9-ը՝ տնտեսագիտական խմբակ, 8 աշակերտ ոչ մի խմբակ չեն հաճախում: Տնտեսագետներից քանի՞սն են հրապուրվում մաթեմատիկայով:

22. Դասարանի այն աղջիկները, որոնք սիրում են մաթեմատիկա, այնքան են, որքան այդ դասարանի այն տղաներն են, որոնք չեն սիրում մաթեմատիկա: Դասարանում ովքե՞ր են շատ՝ որոնք սիրում են մաթեմատիկա, թե՞ տղաները:

23. Եկան 100 տուրիստ: Նրանցից 10-ը չգիտեն ո՛չ գերմաներեն, ո՛չ ֆրանսերեն լեզու, 75-ը գիտեն գերմաներեն և 83-ը գիտեն ֆրանսերեն: Քանի՞ տուրիստ գիտեն և՛ ֆրանսերեն, և՛ գերմաներեն:

24. Մաթեմատիկոսների մեջ յուրաքանչյուր ութերորդը փիլիսոփա է, իսկ փիլիսոփաների մեջ յուրաքանչյուր տասներորդը՝ մաթեմատիկոս: Ովքե՞ր են շատ՝ մաթեմատիկոսները, թե՞ փիլիսոփաները:

25. Սպորտային ճամբարում տղաների 65%-ը կարողանում է խաղալ ֆուտբոլ, 70%-ը՝ վոլեյբոլ և 75%-ը՝ բասկետբոլ: Ո՞րն է ամենափոքր տոկոսն այն տղաների, որոնք կարողանում են խաղալ և՛ ֆուտբոլ, և՛ վոլեյբոլ, և՛ բասկետբոլ:

26. Տասներորդ դասարանի 40 աշակերտից 30-ը կարողանում է լողալ, 27-ը կարողանում է շախմատ խաղալ և միայն հինգը չի կարողանում ոչ մեկը, ոչ՝ մյուսը: Տասներորդցիներից քանի՞սն են, որ կարողանում են և՛ լողալ, և՛ շախմատ խաղալ:

27. Դիցուք, A բազմությունը պարունակում է n տարր, B բազմությունը՝ m տարր, իսկ $A \cap B$ բազմությունը՝ k տարր: Գտնել՝ ա) $A \cup B$ և բ) $A \times B$ բազմություններից յուրաքանչյուրի տարրերի քանակը:

28. Դիցուք, $A \in N$ և A-ի յուրաքանչյուր տարրը բազմապատիկ է կա՛մ 2-ին, կա՛մ 3-ին, կա՛մ 5-ին: Գտնել A բազմության տարրերի քանակը, եթե նրանց մեջ կան՝ 2-ին բազմապատիկ 70 թիվ, 3-ին բազմապատիկ 60 թիվ, 5-ին բազմապատիկ 80 թիվ, 6-ին բազմապատիկ 32 թիվ, 10-ին բազմապատիկ 35 թիվ, 15-ին բազմապատիկ 38 թիվ, 30-ին բազմապատիկ 20 թիվ:

§ 2. ԴԻՐԻԽԼԵԻ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ ԵՎ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԼՈՒԾԵԼԻՍ

Մտավոր զարգացման և մաթեմատիկական գիտելիքների ձևավորման գործում մեծ դեր ունեն մաթեմատիկական տրամաբանական «ապացուցման» խնդիրները: Հաճախ այդպիսի շատ խնդիրների լուծմանն օգնության է գալիս, այսպես կոչված, Դիրիխլեի[1] սկզբունքը, որն արտահայտում է վերջավոր բազմությունների հիմնական հատկությունները: Բազմությունների «լեզվով» այն ներկայացվում է հետևյալ բովանդակությամբ.

Թ ե ո ր ե մ 1: **Եթե n տարր պարունակող բազմությունը ներկայացված է k հատ ենթաբազմությունների միավորման տեսքով, ապա այդ ենթաբազմություններից գոնե մեկը պարունակում է $\frac{n}{k}$-ից ոչ պակաս քանակով տարր:**

Այս թեորեմը սովորաբար կիրառվում է այնպիսի իրադրությունում, որտեղ $k < n$, իսկ ենթաբազմությունները զույգ առ զույգ չեն հատվում:

Թեորեմն ապացուցենք հակասող ենթադրության եղանակով: Ընդունենք, որ ենթաբազմություններից և ոչ մեկը չի պարունակի $\frac{n}{k}$-ից մեծ կամ հավասար քանակով տարրեր, այսինքն՝ յուրաքանչյուր ենթաբազմության տարրերի թիվը փոքր է $\frac{n}{k}$-ից: Այդ դեպքում բոլոր k ենթաբազմությունների ընդհանուր տարրերի քանակը փոքր կլինի $k \cdot \frac{n}{k}$-ից, այսինքն՝ n-ից: Ստացված հակասությունը հաստատում է թեորեմի պնդումը:

[1] *Պետեր Գուստավ Լեժեն Դիրիխլե (1805-1859) – գերմանացի նշանավոր մաթեմատիկոս:*

Դիտողություն: Վերևում բերված թեորեմը կարելի է ձևակերպել նաև այսպես՝

Թեորեմ 1΄: **Եթե n տարր պարունակող բազմությունը տրոհվել է զույգ առ զույգ ընդհանուր տարր չունեցող $k(k<n)$ հատ ենթաբազմությունների, ապա այդ ենթաբազմություններից որևէ մեկը պարունակում է առնվազն q տարր, որտեղ q-ն՝ n-ը k-ի վրա բաժանելուց ստացված քանորդն է:**

Երբեմն Դիրիխլեի սկզբունքը ձևակերպվում է պարզ, մատչելի լեզվով.

«Եթե n խցիկներում տեղավորված են n-ից ավելի առարկաներ, ապա ինչ-որ խցիկում կգտնվեն այդ առարկաներից առնվազն երկուսը»:

Այն հաճախ ձևակերպվում է նաև կատակային տեսքով.

«Եթե n վանդակներում տեղավորված են m ճագարներ, ընդ որում $m>n$, ապա վանդակներից մեկում կգտնվեն առնվազն երկու ճագար»:

Առաջին հայացքից զարմանալի է, թե ինչպես կարող է այդ ակնհայտ և պարզ պնդումը դառնալ արդյունավետ և հուսալի մեթոդ՝ բարդ խնդիրների լուծման համար: Բանն այն է, որ յուրաքանչյուր կոնկրետ խնդրում այնքան էլ հեշտ չէ կռահել, թե այնտեղ ինչն է «ճագարը», և ինչը՝ «վանդակը», և թե ինչո՞ւ «ճագարները» քանակով շատ են «վանդակներից»: «Ճագարների» և «վանդակների» ընտրությունը միշտ չէ, որ ակնհայտ է: Ավելին, նույնիսկ խնդրի տեքստից պարզ չի երևում՝ կիրառելի՞ է արդյոք Դիրիխլեի սկզբունքը: Դրա համար անհրաժեշտ է տրամաբանական խնդիրների լուծման որոշակի կարողություն և հմտություն: Դիրիխլեի սկզբունքի կիրառմամբ խնդիրների լուծումը հատուկ գիտելիքներ չի պահանջում: Այդպիսի տրամաբանական խնդիրները լուծելու համար նույնիսկ պարտադիր չէ մաթեմատիկական պատրաստվածություն. պարզապես հարկավոր է ունենալ առողջ տրամաբանություն և սթափ մտածողություն: Պատահական չէ, որ մաթեմատիկական մրցույթների ժամանակ հաճախ են առաջադրվում այնպիսի խնդիրներ, որոնք լուծվում են Դիրիխլեի սկզբունքի կիրառմամբ:

Անցնենք խնդիրների լուծմանը: Տեսնենք, թե ինչպես է գործում «Դիրիխլեի սկզբունքը»:

Օրինակ 1: ***Ցանկացած ձևով ընտրված է 10 մարդ: Ապացուցել, որ նրանցից գոնե երկուսն այդ խմբի մեջ կունենան հավասար թվով ծանոթներ:***

Լուծում: Պատկերացնենք 0, 1. 2, ... , 9 թվերով համարակալված յոթ խցիկ: Տվյալ համարով խցիկում այդ խմբից տեղավորենք նրան, ով ունի այդ համարի չափ ծանոթներ: Հնարավոր է երկու դեպք: Եթե այդ խմբից կա մարդ, որը մյուսներից ոչ մեկին ծանոթ չէ, ապա 9 համարով խցիկը դատարկ կմնա: Եթե այդպիսի մարդ չկա, ապա 0 համարով խցիկը կլինի դատարկ: Երկու դեպքում էլ գործ կունենանք ինը խցիկների հետ: Դիրիխլեի սկզբունքի պայմաններն առկա են: Հետևաբար խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Օրինակ 2: ***Ընտրված են կամայական հարյուր բնական թվեր: Ապացուցել, որ դրանցից կարելի է ընտրել մի քանիսը (կամ մեկը), որոնց գումարը բաժանվում է 100-ի:***

Լուծում: Դիցուք՝ ընտրված թվերն են՝ $a_1, a_2, ..., a_{100}$:

Դիտարկենք հետևյալ 100 բնական թվերը՝

$$b_1 = a_1,$$

$$b_2 = a_1 + a_2,$$

$$b_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

....

$$b_{100} = a_1 + a_2 + ... + a_{100}:$$

Եթե այդ գումարելիներից մեկը բաժանվի 100-ի, ապա խնդիրը լուծված է: Ենթադրենք, թե $b_1, b_2, ..., b_{100}$ թվերից և ոչ մեկը չի բաժանվում 100-ի: Այդ դեպքում նրանցից յուրաքանչյուրը 100-ի բաժանվելիս մնացորդում կտա 1, 2, ..., 99 թվերից մեկը, որոնց քանակը 99 է: Հետևաբար, համաձայն Դիրիխլեի սկզբունքի, կգտնվեն երկու թվեր, որոնք բաժանվելով 100-ի, կտան միևնույն մնացորդը (այստեղ «ճագարները»՝ $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ թվերն են, իսկ «վանդակները»՝ 1, 2, ..., 99 մնացորդները): Դիցուք՝ այդ թվերն են b_k-ն և b_m-ը ($m > k$): Այդ դեպքում պարզ է, որ նրանց տարբերությունը բաժանվում է 100-ի՝

$$b_m - b_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_m :$$

Վերջին արտահայտությունն էլ հենց ընտրված 100 թվերից մի քանիսի գումարն է: Դրանով էլ հաստատվում է խնդրի պնդումը:

Օրինակ 3: ***Ապացուցել, որ գոյություն ունի 3-ի աստիճան, որը վերջանում է 000001-ով:***

Լուծում: Դիտարկենք

$$3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{10^6}, 3^{10^6+1}$$

թվերը: Ակնհայտ է, որ այդ թվերը 10^6-ի բաժանելիս ստացվող հնարավոր մնացորդները պետք է փնտրել $0, 1, 2, \ldots, 10^6 - 1$ թվերի մեջ, որոնց քանակը 10^6 է: Սակայն դիտարկվող թվերի քանակը $(10^6 + 1)$ է (այս օրինակում «ճագարները» դիտարկվող թվերն են, իսկ «վանդակները»՝ մնացորդները): Ըստ Դիրիխլեի սկզբունքի, կգտնվեն նշված թվերից երկուսը, որոնք 10^6-ի վրա բաժանելիս տալիս են միևնույն մնացորդը: Դիցուք, այդ թվերն են՝ 3^m և 3^{m+k}: Այդ թվերի տարբերությունը կբաժանվի 10^6-ի, այսինքն՝

$$3^{m+k} - 3^m = 3^m(3^k - 1) \vdots 10^6 :$$

Քանի որ 3^m և 10^6 թվերը փոխադարձաբար պարզ են, հետևաբար $(3^k - 1) \vdots 10^6$: Նշանակում է՝ գոյություն ունի այնպիսի բնական q թիվ, որ $3^k - 1 = 10^6 q$, որտեղից էլ՝

$$3^k = 10^6 q + 1 = \cdots 000001 :$$

Ստացվեց այն, ինչ պետք էր ապացուցել:

Հաջորդ օրինակը օգտակար պնդում է․ այն կարող է կիրառվել որոշ խնդիրներ լուծելիս:

Օրինակ 4: **Ապացուցենք, որ ցանկացած $a > 0$ թվի և ցանկացած բնական n թվի համար գոյություն ունեն այնպիսի $k > 0$ և $m \geq 0$ ամբողջ թվեր, որ**

$$|ka - m| \leq \frac{1}{n}:$$

Ապացուցում: $[0;1]$ հատվածը

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n}$$

կետերով բաժանվում է n հավասար մասերի: Դիտարկենք հետևյալ $(n+1)$ թվերը՝

$$a,\ 2a,\ 3a\ ,\ldots,\ na,\ (n+1)a:$$

Նրանցից յուրաքանչյուրը ներկայացնենք ամբողջ և կոտորակային մասերի գումարի տեսքով: Հիշենք, որ իրական թվի ամբողջ մաս է կոչվում այդ թիվը չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվը: Թվի կոտորակային մաս ենք անվանում այդ թվի և իր ամբողջ մասի տարբերությունը: Սահմանումներից հետևում է, որ ցանկացած թվի կոտորակային մասը $[0;1)$ միջակայքի թիվ է:

Այժմ դիտարկենք վերը նշված $n+1$ թվերի կոտորակային մասերը: Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն կգտնվեն այդ թվերից երկուսը, որոնք պատկանում են $\frac{1}{n}$ երկարությամբ նշված n հատվածներից մեկին: Դիցուք, այդ թվերն են՝

$$r_1 = k_1 a - m_1 \ \text{ և } \ r_2 = k_2 a - m_2 \quad (k_1, k_2 \in \{1; 2; \cdots; n; n+1\}):$$

Ակնհայտ է, որ

$$|r_1 - r_2| \leq \frac{1}{n},$$

այսինքն՝

$$\left|\,(k_1-k_2)a-(m_1-m_2)\,\right|\le\frac{1}{n}:$$

Վերջին անհավասարությունը հաստատում է $k_1-k_2=k$ և $m_1-m_2=m$ ամբողջ թվերի գոյությունը: Թեորեմն ապացուցված է:

*Օ ր ի ն ա կ 5: **Ապացուցենք, որ՝***

ա) $y=\sqrt{3}x$ ուղիղը չի կարող անցնել սկզբնակետից տարբեր ամբողջ կոորդինատներ ունեցող կետով,

բ) ցանկացած բնական n թվի համար գոյություն ունի այնպիսի ամբողջ կոորդինատներով կետ, որի հեռավորությունը $y=\sqrt{3}x$ ուղղից փոքր է $1/n$ -ից:

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: ա) Ենթադրենք, թե գոյություն ունի սկզբնակետից տարբեր $(p;q)$ ամբողջաթիվ կետ, որը պատկանում է $y=\sqrt{3}x$ ուղղին: Այդ դեպքում $q=\sqrt{3}p$, որտեղից էլ՝ $\frac{q}{p}=\sqrt{3}$ (քանի որ $p\neq 0$): Վերջին հավասարությունը տեղի ունենալ չի կարող, քանի որ $\frac{q}{p}$ թիվը ռացիոնալ է, իսկ $\sqrt{3}$-ը՝ իռացիոնալ: Ստացված հակասությունն էլ ապացուցում է խնդրի առաջին մասը:

բ) Խնդրի առաջին մասի համաձայն՝ $a=\sqrt{3}$ թվի և ցանկացած բնական n թվի համար գոյություն ունեն այնպիսի k և m բնական թվեր, որոնց համար տեղի ունի $\left|\sqrt{3}k-m\right|<\frac{1}{n}$ անհավասարությունը:

Մյուս կողմից, ակնհայտ է, որ $(k;m)$ կետի հեռավորությունը $y=\sqrt{3}x$ ուղղից ավելի փոքր է, քան $\left|\sqrt{3}k-m\right|$ մեծությունը (ուղղանկյուն եռանկյան էջը փոքր է ներքնաձիգից), ուստի այն, առավել ևս, փոքր է $1/n$ -ից:

Այս խնդրի լուծման ընթացքից հետևում է, որ $y = \sqrt{3}x$ ուղղին ցանկացած չափով մոտ ամբողջ կոորդինատներով կետեր գոյություն ունեն:

Առաջադրանքներ

1. Տասներկու բնական թվերի գումարը 365 է: Ապացուցել, որ այդ թվերից գոնե մեկը փոքր չէ 30-ից:
2. Քանիմեկ աշակերտների բաժանեցին 200 տետր: Ապացուցել, որ նրանցից առնվազն երկուսը ստացել են հավասար քանակով (հնարավոր է՝ 0-ական) տետրեր:
3. Քաղաքն ունի առնվազն 200 000 բնակիչ, որոնք պատկանում են 33 ազգության: Ապացու-ցել, որ այդ քաղաքում կգտնվեն միննույն ազգությանը պատկանող առնվազան 6 000 մարդ:
4. Դասարանն ունի 24 աշակերտ: Թելադրության գրավոր աշխատանքի մեջ Գեղամն արել էր 11 սխալ, իսկ մնացած աշակերտները՝ ավելի քիչ սխալներ: Ապացուցել, որ առնվազն երեք աշակերտ արել են նույն քանակով սխալներ (հնարավոր է՝ 0-ական):
5. Եղևնիների անտառում կա 800 000 եղևնի, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է ոչ ավելի, քան 500 000 ասեղ: Ապացուցել, որ կգտնվեն գոնե երկու եղևնի, որոնց ասեղների քանակը կլինի նույնը:
6. Ապացուցել, որ ցանկացած յոթ բնական թվերից կարելի է ընտրել երկուսը, որոնց տարբերությունը բաժանվում է 6-ի:
7. Ձևակերպել և ապացուցել ընդհանուր պնդում, որի մասնավոր դեպքը նախորդ խնդրի լուծումն է:

8. Ապացուցել, որ ցանկացած ձևով ընտրված 10 մարդկանցից գոնե երկուսն ունեն միևնույն քանակով ծանոթներ այդ խմբից (հնարավոր է՝ 0-ական ծանոթներ): Համարվում է, որ որ A և B մարդկանց ծանոթությունը փոխադարձ է. եթե A -ն ծանոթ է B -ին, ապա B -ն ծանոթ է A -ին:

9. Ապացուցել նախորդ խնդրի ընդհանուր պնդումը. ցանկացած ձևով ընտրված n մարդկանցից գոնե երկուսն ունեն միևնույն քանակով ծանոթներ այդ խմբից:

10. Մարդու գլխի մազերի թիվը չի գերազանցում 300 000-ը: Ապացուցել, որ կգտնվեն չորս երևանցիներ, որոնք ունեն միևնույն քանակով գլխի մազեր (Երևանի բնակչությունը գերազանցում է 1,3 մլն-ը):

11. Դիցուք՝ $p\,/\,q$ ռացիոնալ թիվը ($p,q \in N$) ներկայացվում է անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով: Ապացուցել, որ այն անպայման պարբերական է:

12. 1-ից 10 բնական թվերը կամայական կարգով գրված են միևնույն տողում: Նրանցից յուրաքանչյուրը գումարեցին այդ տողում նրա զբաղեցրած տեղի համարը: Ապացուցել, որ ստացված տասը գումարներից գոնե երկուսը վերջանում են նույն թվանշանով:

13. Միևնույն տողում գրված են ութ բնական թվեր: Ապացուցել, որ կարելի է ընտրել այդ թվերից մեկը կամ կողք-կողքի գրված մի քանիսը, որոնց գումարը բաժանվում է 8-ի:

14. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվերից կարելի է ընտրել մեկը կամ մի քանիսը, որոնց գումարը բաժանվում է n -ի:

15*. Առաջին հարյուր բնական թվերից կամայական ձևով ընտրվել է 51 թիվ: Ապացուցել, որ ընտրված թվերից միշտ կգտնվեն երկուսը, որոնցից մեկը բաժանվում է մյուսին:

16. Ապացուցել, որ գոյություն ունի 2017-ի բազմապատիկ թիվ, որի տասնորդական գրառման մեջ մասնկցում է միայն 7 թվանշանը:

17. Ապացուցել, որ գոյություն ունի այնպիսի բնական k թիվ, որի դեպքում $3^k = ...00001$:

18. Դիցուք՝ բնական k թիվը և 10-ը փոխադարձաբար պարզ են՝ $(k,10)=1$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի այնպիսի բնական m թիվ, որ $k^m = ...\underbrace{000...001}_{100}$:

19*. p և q թվերը փոխադարձաբար պարզ են: Ապացուցել, որ գոյություն ունի այնպիսի $k \in N$ թիվ, որ pk -ն բաժանվելով q-ի, տալիս է 1 մնացորդ:

20*. Ապացուցել, որ 10-ի հետ փոխադարձաբար պարզ ցանկացած բնական n թվի համար գոյություն ունի միայն մեկերով գրված թիվ, որը բաժանվում է n -ի:

21*. Տրված է բնական թվերի հետևյալ հաջորդականությունը՝

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34;. . ., որում յուրաքանչյուր թիվ, սկսած երկրորդից, հավասար է նախորդ երկու թվերի գումարին: Ապացուցել, որ այդ հաջորդականության մեջ գոյություն ունի չորս հատ զրոյով վերջացող թիվ (այսինքն՝ 10000-ի բազմապատիկ թիվ):

22*. $n \times n$ չափսերով քառակուսի վանդակներում կամայական ձևով դասավորված են 1-ից մինչև n^2 բնական թվերը: Ապացուցել, որ միշտ կգտնվեն ընդհանուր կողմ ունեցող երկու վանդակներ, որոնցում գրված թվերի տարբերությունը մեծ է 5-ից, եթե. ա) $n=10$, բ) $n>10$: Ճի՞շտ է, արդյոք, այդ պնդումը $n=5$ դեպքում:

23. Հարթության վրա տրված է 15 ուղիղ, որոնցից յուրաքանչյուրը հատում է մյուսները: Ապացուցել, որ նրանցից որևէ երկուսով կազմված անկյունը մեծ չէ 12^0-ից:

24. 2 կողմով հավասարակողմ եռանկյան ներսում կամայական ձևով նշված են 5 կետ: Ապացուցել, որ նրանցից կարելի է ընտրել երկուսը, որոնց հեռավորությունը փոքր է 1-ից:

25. Միավոր կողմով քառակուսու ներսում կամայական ձևով նշված են 201 կետ: Ապացուցել, որ նրանցից ինչ-որ երեքը կարելի է ծածկել 0,1 կողմով քառակուսիով:

26. Միավոր կողմով քառակուսու ներսում գտնվում է 33 կետ: Ապացուցել, որ նրանցից երեքը կարելի է ծածկել 3/16 շառավիղ ունեցող շրջանով:

27. 6×8 չափսերով ուղղանկյան ներսում պատահականորեն ընտրված են 5 կետ: Ապացուցել, որ նրանցից գոնե երկուսի հեռավորությունը չի գերազանցում 5-ը:

28*. 3×4 չափսերով ուղղանկյան ներսում պատահական դասավորությամբ նշված են 6 կետ: Ապացուցել, որ նրանցից կարելի է ընտրել երկուսը, որոնց հեռավորությունը չի գերազանցի $\sqrt{5}$ -ը:

29*. Հարթության վրա նշված 31 կետերն այնպիսին են, որ նրանցից ցանկացած երեքից կգտնվեն երկուսը, որոնց հեռավորությունը փոքր է 1-ից: Ապացուցել, որ գոյություն ունի միավոր շառավղով այնպիսի շրջան, որը կպարունակի այդ կետերից առնվազն 16-ը:

30. Տրված են 7 հատվածներ, որոնցից յուրաքանչյուրի երկարությունը մեծ է 10 սմ-ից և փոքր է 1 մ-ից: Ապացուցել, որ նրանցից որևէ երեքով կարելի կառուցել եռանկյուն:

31*. Ինն ուղիղներից յուրաքանչյուրը տրված քառակուսին տրոհում է այնպիսի քառանկյունների, որոնց մակերեսները հարաբերում են այնպես, ինչպես 2:3: Ապացուցել, որ այդ ուղիղներից առնվազն երեքը կանցնեն միևնույն կետով:

32*. Շրջանագծի մի քանի աղեղներ ներկված են կանաչ գույնով: Ներկված բոլոր աղեղների երկարությունների գումարը փոքր է շրջանագծի երկարության կեսից: Ապացուցել, որ գոյություն ունի տրամագիծ, որի երկու ծայրերն էլ ներկված չեն:

33*. 1 երկարությամբ հատվածի վրա մի քանի հատվածներ ներկված են այնպես, որ ցանկացած երկու ներկված կետերի հեռավորությունը հավասար չէ 0,1-ի: Ապացուցել, որ ներկված բոլոր հատվածների երկարությունների գումարը չի գերազանցում 0,5-ը:

34*. 30 սմ^2 մակերեսով քառակուսու ներսում կամայական դասավորությամբ գտնվում են երեք բազմանկյուններ, որոնցից յուրաքանչյուրի մակերեսը 15 սմ^2 է: Ապացուցել, որ այդ բազմանկյուններից որևէ երկուսի ընդհանուր մասի մակերեսը փոքր չէ 5 սմ^2-ից:

35*. Միավոր կողմով քառակուսու ներսում գտվում են մի քանի շրջանագծեր, որոնց երկարությունների գումարը հավասար է 10-ի: Ապացուցել, որ շրջանագծերի ցանկացած դասավորության դեպքում միշտ գտնվի քառակուսու կողմին զուգահեռ այնպիսի ուղիղ, որը կհատի այդ շրջանագծերից առնվազն չորսը:

§ 3. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՊԱՑՈՒՑՈՒՄ

Համառոտ տեղեկություններ

Զրոյից տարբեր բոլոր իրական թվերը բաժանվում են **դրական** և **բացասական** թվերի, որոնց համար ընդունվում են հետևյալ նախնական պնդումները (ակսիոմները).

1⁰. Եթե $a \neq 0$, ապա a և $-a$ թվերից մեկը դրական է, իսկ մյուսը՝ բացասական:

2⁰. Երկու դրական թվերի գումարը նույնպես դրական է:

3⁰. Երկու դրական թվերի արտադրյալը նույնպես դրական է:

Հիշենք անհավասարություններին վերաբերող հիմնական սահմանումները և հատկությունները:

Եթե $a-b$ տարբերությունը դրական է, ապա ասում են, որ a-ն մեծ է b-ից և գրառում՝ $a>b$:

Եթե $a-b$ տարբերությունը բացասական է, ապա ասում են, որ a-ն փոքր է b-ից և գրառում՝ $a<b$:

Քանի որ $a-b$ թիվը կա՛մ դրական է, կա՛մ՝ բացասական, կա՛մ հավասար է զրոյի, հետևաբար ցանկացած a և b թվերի համար

$a>b$, $a<b$, $a=b$

առնչություններից մեկը (և միայն մեկը) ճշմարիտ է:

$a>b$, $a<b$ գրառումներն անվանում են **խիստ անհավասարություններ:** Դրանցից բացի գործածվում են նաև **ոչ խիստ անհավասարությունները**՝ $a \geq b$, $a \leq b$:

$a \geq b$ գրառումը նշանակում է, որ ճիշտ է $a>b$, $a=b$ առնչություններից մեկը:

Նշենք անհավասարությունների հիմնական հատկությունները:

1) **Եթե** $a>b$, **ապա** $b<a$:

2) **Եթե** $a>b$ **և** $b>c$, **ապա** $a>c$:

3) **Եթե** $a>b$ **և** c**-ն ցանկացած թիվ է, ապա** $a+c>b+c$:

4) **Եթե** $a>b$ **և** $c>d$**, ապա** $a+c>b+d$:

5) **Եթե** $a>b$ **և** $c>0$**, ապա** $ac>bc$:

6) **Եթե** $a>b$ **և** $c<0$**, ապա** $ac<bc$:

7) **Եթե** $a>b\ge 0$**, ապա ցանկացած** $\mathrm{n}\in\mathrm{N}$ **դեպքում** $a^n>b^n$;

8) **Եթե** $a>b$**, ապա ցանկացած** $\mathrm{n}\in\mathrm{N}$ **դեպքում** $a^{2n+1}>b^{2n+1}$;

9) **Եթե** $a>b\ge 0$**, ապա ցանկացած** $\mathrm{n}\ge 2$, $\mathrm{n}\in\mathrm{N}$ **դեպքում**

$$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b};$$

10) **Եթե** $a>b$**, ապա ցանկացած** $\mathrm{n}\in\mathrm{N}$ **դեպքում** $\sqrt[2n+1]{a}>\sqrt[2n+1]{b}$:

Օգտակար է հիշել մի քանի կարևոր (առավել գործածական) անհավասարություններ.

1. **Ցանկացած** a **և** b **թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝**

$$a^2+b^2\ge 2ab: \qquad (1)$$

2. **Ցանկացած դրական** a **թվի համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝**

$$a+\frac{1}{a}\ge 2: \qquad (2)$$

3. **Երկու ոչբացասական թվերի թվաբանական միջինը փոքր չէ այդ թվերի երկրաչափական միջինից՝**

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}: \qquad (3)$$

Ընդհանրապես, եթե $\mathrm{n}\ge 2$, $\mathrm{n}\in\mathrm{N}$, **ցանկացած ոչբացասական** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **թվերի թվաբանական միջինը փոքր չէ այդ թվերի երկրաչափական միջինից**, այսինքն՝

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\ ^{1)}: \qquad (4)$$

---

1) Անհավասարությունն անվանում են **Կոշիի անհավասարություն**՝ ի պատիվ ֆրանսիացի հայտնի մաթեմատիկոս Օգյուստեն Կոշիի (XIX դ.):

4. **Եթե** a, b, c **թվերն այնպիսին են, որ** $a>0$ **և** $b^2-4ac\le 0$**, ապա ցանկացած** x **թվի համար**

$$ax^2+bx+c\ge 0: \qquad (5)$$

5. **Ցանկացած** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **թվերի համար ճիշտ է**

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\le|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n| \qquad (6)$$

անհավասարությունը:

Մասնավորաբար, $\qquad |a_1+a_2|\le|a_1|+|a_2|:$

6. **Ցանկացած** $x \geqslant 1$ **թվի և ցանկացած n բնական թվի համար ճիշտ է**

$$(1+x)^n\ge 1+nx$$

անհավասարությունը (*Բեռնուլլիի անհավասարություն*):

7. **Ցանկացած** $a_1, a_2, \ldots a_n,\ b_1, b_2, \ldots b_n$ **թվերի համար տեղի ունի Բունյակովսկու**[2] **անհավա-սարությունը՝**

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2): (7)$$

Այդ անհավասարությունը հակիրճ գրառում են այսպես՝

$$\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right):$$

* * *

Այստեղ հիմնականում կդիտարկվեն այնպիսի անհավասարություններ, որոնց ճշմարիտ լինելը պահանջվում է ապացուցել փոփոխականների արժեքների տրված բազմության վրա: Եթե այդպիսի բազմություն չի նշված, ապա պետք է հասկանալ, որ այդ փոփոխականները կարող են ընդունել ցանկացած թույլատրելի արժեքներ:

---

[2] Ի պատիվ ռուս խոշոր մաթեմատիկոս Վ. Յու. Բունյակովսկու (XIX դ. վերջ XX դ. սկիզբ):

Նշենք, որ անհավասարությունների ապացուցման ընդհանուր մեթոդ գոյություն չունի: Այստեղ, տիպական անհավասարությունների մի քանի օրինակների քննարկմամբ, կառանձնացնենք այնպիսի եղանակներ, որոնք առավել գործածական են անհավասարություններն ապացուցելիս:

1°. ***Անհավասարությունների ապացուցում սահմանման և նույնական ձևափոխությունների օգնությամբ:*** Սահմանման համաձայն ընդունվում է, որ $p > q$, եթե $p - q$ տարբերությունը դրական է: Դրա համար էլ $a, b, \ldots, h$ փոփոխականներով $f(a,b,\ldots,h) > g(a,b,\ldots,h)$ անհավասարությունն ապացուցելու համար անհրաժեշտ է կազմել $f(a,b,\ldots,h) - g(a,b,\ldots,h)$ տարբերությունը և նույնական որոշ ձևափոխությունների միջոցով համոզվել նրանում, որ այն դրական է փոփոխականների թույլատրելի բոլոր արժեքների կամ նախապես նշված բազմության տարրերի դեպքում (համանմանորեն, այդ եղանակը կիրառվում է նաև $f < g$, $f \geq g$, $f \leq g$ տեսքի անհավասարություններն ապացուցելիս):

Ապացուցվելիք անհավասարության ձախ և աջ մասերի արտահայտությունների տարբերությունը նույնական ձևափոխությունների միջոցով կարելի է տանել տարբեր ուղղություններով, սակայն այստեղ կարևոր է կողմնորոշվել և ընտրել այն ուղին, որը կարող է լինել ավելի արդյունավետ:

Օ ր ի ն ա կ 1 : ***Ապացուցենք (3) անհավասարությունը :***

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ : Կազմենք $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ տարբերությունը և պարզենք նրա նշանը: Ունենք՝

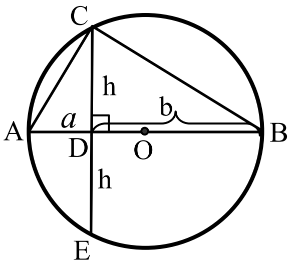
$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}:$$

Ակնհայտ է, որ ցանկացած ոչբացասական a և b արժեքների դեպքում վերջին արտահայտությունը ոչբացասական է, հետևաբար,

$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$ տարբերությունն է ոչբացասական, իսկ դա նշանակում է, որ $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ։

Նշենք, որ հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b$ ։

Դիտողություն: Երկու թվերի «միջին թվաբանական» և «միջին երկրաչափական» անվանումները ծագել են այն փաստից, որ x թիվը թվաբանական պրոգրեսիա կազմող a, x, b երեք թվերից միջինն է իսկ y թիվը a, y, b դրական անդամներով երկրաչափական պրոգրեսիայի միջին անդամն է $\left(y=\sqrt{ab}\right)$։ Ապացուցված անհավասարությունն ունի երկրաչափական պարզ մեկնաբանություն: Ինչպես հայտնի է, ABC ուղղանկյուն եռանկյան $\left(\angle C=90^{\circ}\right)$ մեջ ներքնաձիգին տարած CD բարձրությունը AD և DB հատվածների միջին երկրաչափականն է (նկ. 7): Նշանակելով՝ $AD=a$, $DB=b$, կունենանք՝ $CD=\sqrt{ab}$ ։ Մյուս կողմից, CE–ն ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի լար է, ուստի $CE\leq AB$ ։ Քանի որ $CE=2\cdot CD$ և $AB=a+b$, հետևաբար



Նկ. 7

$$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\ ։$$

Օրինակ 2: ***Ապացուցենք, որ եթե*** $ab>0$ ***, ապա***

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\ ։\qquad (7)$$

Ապացուցում: Ունենք՝

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}\ ։$$

Քանի որ $ab > 0$, ուստի, ակնհայտ է, որ $\frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$: Պարզ է, որ (7)-ում հավասարության նշան տեղի ունի միայն $a = b$ դեպքում: Այսպիսով, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2$ տարբերությունը ոչբացասական է, հետևաբար (7) անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 3: ***Ապացուցենք անհավասարությունը՝***

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y: \qquad (8)$$

Լուծում: Դիտարկենք $(x^2 + y^2 + 1) - (xy + x + y)$ տարբերությունը և այն ձևափոխենք այսպես՝

$$\frac{1}{2}((x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1)) = \frac{1}{2}((x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2):$$

Վերջին արտահայտությունը, ակնհայտորեն, ոչբացասական է (ցանկացած x և y թվերի դեպքում): Դրանով էլ ապացուցվում է (8) անհավասարությունը: Նկատենք, որ այդ անհավասարության մեջ հավասարության դեպք տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $x = y = 1$ (հիմնավորեք):

Օրինակ 4: ***Ապացուցենք, որ եթե*** $a + b + c \geq 0$***, ապա***

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc: \qquad (9)$$

Ապացուցում: Դիտարկենք $(a^3 + b^3 + c^3) - 3abc$ տարբերությունը, որում $a^3 + b^3$ գումարը լրացնենք մինչև գումարի խորանարդ: Կստանանք՝

$$(a^3 + b^3 + c^3) - 3abc = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc =$$

$$= (a+b)^3 - 3ab(a+b+c) + c^3:$$

$(a+b)^3 + c^3$ խորանարդների գումարը վերածելով բազմապատկիչների, կունենանք՝

$$((a+b)^3 + c^3) - 3ab(a+b+c) = ((a+b)+c)((a+b)^2 - (a+b)c + c^2) - 3ab(a+b+c) =$$

$$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)=$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)=$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2):$$

Քանի որ, ըստ պայմանի, $a+b+c\geq 0$, ուստի, ակնհայտորեն, ստացված արտահայտությունը ոչբացասական է: Այստեղից հետևում է (9) անհավասարության ճշմարիտ լինելը: Նկատենք, որ այդ անհավասարության մեջ հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a+b+c=0$ կամ $a=b=c$:

Օրինակ 5: ***Ապացուցենք, որ ցանկացած x և y թվերի համար***

$$2x^2+3xy+2y^2-2x-3y+5>0:$$

Լուծում: Ապացուցվելիք անհավասարության ձախ մասի արտահայտությունը ձևափոխենք այսպես

$$2x^2+3xy+2y^2-2x-3y+5=$$
$$=(x^2+2xy+y^2)+(x^2+xy+y^2-2x-3y+5)=$$
$$=(x+y)^2+(x^2+(y-2)x+y^2-3y+5)=$$
$$=(x+y)^2+\left(x+\frac{y-2}{2}\right)^2-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2+y^2-3y+5=$$
$$=(x+y)^2+(x+y)^2+\left(x+\frac{y-2}{2}\right)^2+\frac{3y^2-8y+16}{4}=$$
$$=(x+y)^2+\left(x+\frac{y-2}{2}\right)^2+\frac{2y^2+(y-4)^2}{4}:$$

Ստացված արտահայտությունից պարզ երևում է, որ ցանկացած x և y թվերի դեպքում այն դրական է (ինչո՞ւ չի կարող հավասարվել զրոյի): Անհավասարությունն ապացուցված է:

2⁰. Անհավասարությունների ապացուցում անհավասարությունների հատկությունների կիրառմամբ

*Օ ր ի ն ա կ 6: **Ապացուցենք, որ եթե*** $n\in N,\ n>1$***, ապա***

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1:$$

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ : Ունենք՝

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2\cdot 2}<\frac{1}{1\cdot 2};\quad \frac{1}{9}=\frac{1}{3\cdot 3}<\frac{1}{2\cdot 3};\ \ \ldots\ \ ;\ \frac{1}{n^2}=\frac{1}{n\cdot n}<\frac{1}{(n-1)n}:$$

Գումարելով այդ n անհավասարությունները, կստանանք՝

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=$$

$$=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n-(n-1)}{(n-1)n}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}<1:$$

Այսպիսով, ցանկացած $n\geq 2$ թվի դեպքում $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1:$

*Օ ր ի ն ա կ 7: **Ապացուցենք, որ ցանկացած n > 1 բնական թվի դեպքում ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝***

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}<2:$$

Լուծում: Ամենից առաջ նկատենք, որ անհավասարության ձախ մասը պարունակում է 2n գումարելի: Դժվար չէ նկատել, որ

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n},\quad \frac{1}{n+2}<\frac{1}{n},\ \cdots,\ \frac{1}{3n-1}<\frac{1}{n},\quad \frac{1}{3n}<\frac{1}{n}:$$

Գումարելով այդ 2n անհավասարությունները, կունենանք.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}<2n\cdot\frac{1}{n}=2:$$

Ստացվեց այն, ինչ պետք էր ապացուցել:

Օրինակ 8: ***Ապացուցենք, որ***

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{99}{100}>\frac{1}{15}:$$

Լուծում: Ձախ մասի արտադրիչներն $\frac{n}{n+1}$ տեսքի են, որտեղ n = 1, 2, … , 99: Այդպիսի յուրաքանչյուր կոտորակի համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\frac{n}{n+1}>\frac{n-1}{n}$$ (համոզվեք ինքնուրույն):

Այդ անհավասարության շնորհիվ կարող ենք գրել.

$$\frac{3}{4}>\frac{2}{3},\quad \frac{5}{6}>\frac{4}{5},\cdots,\ \frac{97}{98}>\frac{96}{97},\quad \frac{99}{100}>\frac{98}{99}:$$

Բազմապատկելով ստացված անհավասարությունները, կունենանք.

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\frac{97}{98}\cdot\frac{99}{100}>\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{96}{97}\cdot\frac{98}{99}:$$

Ապացուցվելիք անհավասարության ձախ մասը նշանակելով a –ով, վերջին անհավասարությունը կարող ենք ներկայացնել այսպես՝

$$2a>\frac{1}{100a}:$$

Երկու մասերը բազմապատկելով $\frac{a}{2}$ –ով, կունենանք՝ $a^2>\frac{1}{200}$:

Քանի որ $\frac{1}{200}>\frac{1}{225}$, ուստի առավել ևս՝ $a^2>\frac{1}{225}$, որտեղից էլ կունենանք ապացուցվելիք անհավասարությունը՝ $a>\frac{1}{15}$:

3⁰. Անհավասարությունների ապացուցում հայտնի անհավասարությունների կիրառմամբ: Այս մեթոդի էությունը հետևյալն է. որոշ ակնհայտ կամ հայտնի (ելակետային) անհավասարությունների կիրառմամբ մի շարք ձևափոխությունների միջոցով ստացվում է ապացուցվելիք անհավասարությունը: Իբրև ակնհայտ անհավասարություններ կարող են համարվել, օրինակ,

$A^2 \geq 0$, $A^2 + B^2 \geq 0$ (A-ն և B-ն ցանկացած արտահայտություններ են), $|A| \geq 0$, $\sqrt[2k]{A} \geq 0$ (A-ի ցանկացած ոչբացասական արժեքի և $k \in N$ համար) անհավասարությունները, իսկ որպես ելակետային՝ (1)-(6) անհավասարությունները:

Օրինակ 9: ***Ապացուցենք, որ եթե*** $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$, ***ապա***

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} \qquad (10)$$

(Կոշիի անհավասարությունը չորս թվերի համար):

Ապացուցում: Որպես ելակետային վերցնենք (3) անհավասարությունը (Կոշիի անհավասարությունը երկու թվերի համար): Կիրառելով այն $\frac{a+b}{2}$ և $\frac{c+d}{2}$ ոչբացասական թվերի համար, կունենանք՝

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}:$$

Քանի որ, իր հերթին, (3) անհավասարության շնորհիվ՝

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{և} \quad \frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}, \quad \text{հետևաբար,}$$

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}:$$

Նշանակում է՝ $\dfrac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt[4]{abcd}$, այսինքն՝

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}:$$

Վերլուծելով ապացուցման ընթացքը, գալիս ենք այն եզրակացության, որ (10) անհավասարության մեջ հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b,\ c=d$ և $\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$, այսինքն՝ $a=b=c=d$:

Օրինակ 10: ***Ապացուցենք, որ*** $\left(\frac{\mathrm{n}+1}{2}\right)^{\mathrm{n}} \geq \mathrm{n}!\ \ (\mathrm{n}\in \mathrm{N})$ ***:***

Ապացուցում: Օգտվելով (3) անհավասարությունից, կարող ենք գրել՝

$$\frac{\mathrm{n}+1}{2} \geq \sqrt{\mathrm{n}\cdot 1};\quad \frac{(\mathrm{n}-1)+2}{2} \geq \sqrt{(\mathrm{n}-1)\cdot 2};\quad \frac{(\mathrm{n}-2)+3}{2} \geq \sqrt{(\mathrm{n}-2)\cdot 3};\ldots;$$

$$\frac{2+(\mathrm{n}-1)}{2} \geq \sqrt{2(\mathrm{n}-1)};\quad \frac{1+\mathrm{n}}{2} \geq \sqrt{1\cdot \mathrm{n}}:$$

Բազմապատկելով այդ n անհավասարությունները, կստանանք՝

$$\left(\frac{\mathrm{n}+1}{2}\right)^{\mathrm{n}} \geq \sqrt{(\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)\ldots 2\cdot 1)(1\cdot 2\cdot 3\ldots(\mathrm{n}-1)\mathrm{n})} = \sqrt{\mathrm{n}!\mathrm{n}!} = \sqrt{(\mathrm{n}!)^2} = \mathrm{n}!:$$

Այսպիսով, $\left(\frac{\mathrm{n}+1}{2}\right)^{\mathrm{n}} \geq \mathrm{n}!$, որն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Դժվար չէ համոզվել, որ ապացուցված անհավասարության մեջ հավասարության նշան կարող է տեղի ունենալ միայն $\mathrm{n}=1$ դեպքում:

Օրինակ 11: ***Ապացուցենք, որ եթե*** $a>0,\ \ b>0,\ \ c>0$***, ապա***

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9: \qquad (11)$$

Ապացուցում: 1-ին եղանակ: (2) անհավասարությունն ընդունելով իբրև ելակետային անհավասարություն, կարող ենք գրել.

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2;\qquad \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geq 2;\qquad \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 2:$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 6,\quad \text{այսինքն՝}$$

$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 6:$$

Այնուհետև կատարենք մի շարք ոչ բարդ ձևափոխություններ.

$$\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{a+c}{b}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right)\geq 9,$$

$$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}\geq 9:$$

Այժմ, փակագծերից դուրս հանելով $(a+b+c)$ -ն, կստանանք՝

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9:$$

Հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b=c$ (հիմնավորեք):

2-րդ եղանակ: (11) անհավասարությունը կարելի է ապացուցել նաև սահմանման միջոցով: Ունենք.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)-6=$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)=$$

$$=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)^2}{ac}+\frac{(b-c)^2}{bc}\geq 0:$$

Նշանակում է՝ (11) անհավասարությունը ճշմարիտ է:

Օրինակ 12: ***Ապացուցենք, որ ցանկացած թույլատրելի*** a ***–ի դեպքում***

$$\sqrt[10]{1+a}<1+0{,}1a:$$

Լուծում: Անհավասարության երկու մասերը բարձրացնելով 10–րդ աստիճան, կստանանք համարժեք անհավասարություն՝

$$1+a<(1+0{,}1a)^{10}: \qquad (1)$$

Իսկ այս անհավասարությունն ապացուցելու համար օգտվենք Բեռնուլլիի անհավասարությունից՝

$$(1+x)^n \geq 1+nx,\ n \in N,\ x \geq -1 :$$

Վերցնելով $x = 0,1a$, $n = 10$, կունենանք (1) անհավասարությունը: Դրանով իսկ ապացուցած կլինենք նաև սկզբնական անհավասարությունը:

Օ ր ի ն ա կ 13: ***Ապացուցենք Բունյակովսկու (7) անհավասարությունը:***

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ : Եթե $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, ապա (7)-ում տեղի ունի հավասարության դեպք: Դիցուք, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ թվերից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է. այդ դեպքում՝

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0 :$$

Դիտարկենք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2 : \qquad (1)$$

Ակնհայտ է, որ փոփոխականների ցանկացած արժեքների դեպքում այդ արտահայտությունը ոչբացասական մեծություն է: Այն ներկայացնենք նույնաբար հավասար հետևյալ արտահայտության տեսքով.

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)x^2 + 2\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)x + \left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right): \qquad (2)$$

Վերջինս կարելի է դիտարկել որպես քառակուսային եռանդամ x փոփոխականի նկատմամբ: Քանի որ ցանկացած x–ի դեպքում այդ եռանդամը ոչբացասական է, ուստի նրա տարբերիչը ոչդրական է, այսինքն՝

$$D = \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \leq 0,$$

որտեղից ստանում ենք ապացուցվելիք անհավասարությունը՝

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) :$$

Պարզենք, թե ինչ պայմանների դեպքում տեղի կունենա հավասարության նշան, այսինքն՝ D = 0: Այդ դեպքում (2) քառակուսային եռանդամն ունի միակ՝ x_0 արմատ: Մյուս կողմից, (1) արտահայտությունը հավասար կլինի զրոյի այն և միայն այն դեպքում, երբ բոլոր գումարելիները հավասար են զրոյի.

$$a_1x_0+b_1=a_2x_0+b_2=...=a_nx_0+b_n=0,$$

որտեղից՝

$$b_1=-x_0a_1,\ \ b_2=-x_0a_2,\ \ ...,\ \ b_n=-x_0a_n:$$

Այդ նշանակում է, որ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ և $b_1, b_2, \cdots, b_n$ փոփոխականների արժեքները համեմատական են (համեմատականության $-x_0$ գործակցով): Մասնավորաբար, եթե

$$b_i \neq 0\left(i=1,2,\cdots,n\right), \quad \text{ապա}$$

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}:$$

4[0]. Անհավասարությունների ապացուցում հակասող ենթադրության մեթոդով: Որպեսզի ապացուցենք, որ $A > B$, ենթադրվում է, որ գոյություն ունեն նրանում մասնակցող փոփոխականների այնպիսի արժեքներ, որոնց դեպքում $A \leq B$: Այնուհետև նույնական ձևափոխությունների միջոցով հերքվում է այդ ենթադրությունը:

Օրինակ 14: ***Ապացուցենք, որ եթե*** $a \geq 0,\ \ b \geq 0,\ \ c \geq 0,\ \ d \geq 0$***, ապա***

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd}: \qquad (12)$$

Ապացուցում: Մեզ հարկավոր է ապացուցել, որ ցանկացած ոչ բացասական a, b, c, d արժեքների համար (12) անհավասարությունը ճշմարիտ է: Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի ոչբացասական a, b, c, d արժեքների հավաքածու, որի համար (12) անհավասարությունը ճշմարիտ չէ, այսինքն տեղի ունի

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

անհավասարությունը:

Քանի որ այդ անհավասարության երկու մասերը ոչբացասական են, ապա դրանք քառակուսի բարձրացնելուց հետո կստանանք՝

$$(a+c)(b+d) < ab + cd + 2\sqrt{abcd},$$

որտեղից՝ $bc + ad - 2\sqrt{abcd} < 0$, այնուհետև՝ $\left(\sqrt{bc} - \sqrt{ad}\right)^2 < 0$:

Ստացվեց ակնհայտ ոչ ճիշտ անհավասարություն: Նշանակում է՝ մեր ենթադրությունը ճիշտ չէ, հետևաբար, (12) անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 15: ***Ապացուցենք, որ եթե*** $a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad c \geq 0$***, ապա***

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} : \qquad (13)$$

Ապացուցում: Ենթադրենք, թե գոյություն ունի ոչբացասական a, b, c թվերի հավաքածու, որի համար (13) անհավասարությունը ճիշտ չէ, այսինքն՝ տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} :$$

Այդ անհավասարության երկու մասերը բարձրացնելով քառակուսի, կստանանք՝ $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 > \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$, այնուհետև,

$$(a+b+c)^2 > 3(a^2+b^2+c^2),$$

$$3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 < 0,$$

$$3(a^2+b^2+c^2) - (a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) < 0,$$

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc < 0,$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 < 0 :$$

Վերջին անհավասարությունը ցանկացած $a, \ b, c$ թվերի դեպքում ճիշտ չէ (քառակուսիների գումարը չի կարող լինել բացասական թիվ):

Նշանակում է, որ ճիշտ չէ նաև մեր ենթադրությունը և դրա շնորհիվ (13) անհավասարությունը ճիշտ է:

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն : Դիցուք, տրված են n դրական թվեր՝ $a_1, a_2, ..., a_n$: Դիտարկենք հետևյալ մեծությունները.

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$ – **միջին հարմոնիկ,**

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$ – **միջին երկրաչափական,**

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$ – **միջին թվաբանական,**

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$$ – **միջին քառակուսային:**

Այդ մեծությունների միջև գոյություն ունի այսպիսի առնչություն՝

$H_n \le G_n \le A_n \le Q_n$:

Այս կախվածության մի քանի մասնավոր դեպքեր արդեն ապացուցվել են: Այսպես, 1-ին և 9-րդ օրինակներում ապացուցվել են $G_2 \le A_2$ և $G_4 \le A_4$ անհավասարությունները, օրինակ 7-ում ապացուցված անհավասարությունից հետևում է $H_3 \le A_3$ կախվածությունը, վերջապես, օրինակ 15-ում ապացուցվեց $A_3 \le Q_3$ անհավասարությունը:

5⁰. Անհավասարությունների ապացուցում մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի կիրառումը լայն ընդգրկումներ ունի, մասնավորաբար, բնական փոփոխական պարունակող շատ անհավասարություններ ապացուցելիս: Ստորև դիտարկենք մեծ կիրառություններ ունեցող երկու՝ Բեռնուլլիի և Կոշիի անհավասարությունների ապացուցումները

Օ ր ի ն ա կ 1 6 : Ապացուցենք **Բեռնուլլիի անհավասարությունը**[1)].

$$(1+\alpha)^n \ge 1 + n\alpha, \quad \alpha > -1, \quad n \in \mathrm{N} :$$

[1)] Ի պատիվ XVII դարի շվեյցարացի հայտնի մաթեմատիկոս Յակոբ Բեռնուլլիի (1654–1705):

Լուծում: $n=1$ դեպքում ստանում ենք ճիշտ անհավասարություն`

$$1+\alpha \geq 1+\alpha :$$

Ենթադրենք, թե անհավասարությունը ճիշտ է $n=k$ դեպքում, այսինքն`

$$(1+\alpha)^k \geq 1+k\alpha :$$

Այդ անհավասարության երկու մասերը բազմապատկելով $(1+\alpha)$-ով (հիշենք, որ $\alpha > -1$), կստանանք`

$$(1+\alpha)^{k+1} \geq (1+k\alpha)(1+\alpha) = 1+(k+1)\alpha + k\alpha^2 :$$

Քանի որ $k\alpha^2 \geq 0$, ուստի, առավել ևս, տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը`

$$(1+\alpha)^k \geq 1+(k+1)\alpha :$$

Եվ այսպես, ենթադրելով, որ տրված անհավասարությունը ճիշտ է $n=k$ դեպքում, մենք ապացուցեցինք, որ այն ճիշտ է նաև $n=k+1$ դեպքում: Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի երկու կետերն էլ բավարարված են, որով և ապացուցվում է Բեռնուլլիի անհավասարությունը:

Մինչ Կոշիի անհավասարության անցնելը ապացուցենք հետևյալ օժանդակ թեորեմը:

Թեորեմ: *Եթե* $x_1, x_2, ..., x_n$*-ը դրական թվերն այնպիսին են, որ* $x_1 x_2 ... x_n = 1$*, ապա*

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n :$$

Լուծում: $n=1$ դեպքում կունենանք մեկ դրական թիվ` $x_1$: Ըստ պայմանի $x_1 = 1$ և, հետևաբար, կարելի է գրել $x_1 \geq 1$, այսինքն` $n=1$ դեպքում պնդումը ճիշտ է:

Ենթադրենք, թե պնդումը ճիշտ է $n=k$-ի համար: Համոզվենք, որ այդ պայմանով պնդումը ճիշտ կլինի նաև $n=k+1$ դեպքում:

Դիցուք, $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}$-ը $x_1 x_2 \dots x_k x_{k+1} = 1$ պայմանին բավարարող կամայական դրական թվեր են: Հնարավոր է երկու դեպք.

ա) այդ թվերից յուրաքանչյուրը հավասար է 1-ի: Այդ դեպքում դրանց գումարը հավասար է $(k+1)$-ի, ուստի և անհավասարությունը ճիշտ է;

բ) այդ թվերի մեջ կա գոնե մեկը, որը 1-ից տարբեր է: Այդ դեպքում կգտնվի նրանցից ևս մեկը, որը հավասար չէ 1-ի. ընդ որում, եթե նրանցից մեկը փոքր է 1-ից, ապա մյուսը մեծ է 1-ից: Չսահմանափակելով ընդհանրությունը, կարելի է համարել, որ $x_k > 1$, իսկ $x_{k+1} < 1$: Այժմ դիտարկենք հետևյալ k թվերը՝

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, \quad (x_k x_{k+1}):$$

Դրանց արտադրյալը հավասար է 1-ի, հետևաբար, ինդուկտիվ ենթադրության համաձայն՝

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} \geq k:$$

Վերջին անհավասարության երկու մասերին ավելացնենք

$$x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1}$$

և կատարենք որոշ պարզ ձևափոխություններ.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} \geq k - x_k x_{k+1} + x_k + x_{k+1} =$$

$$k + 1 + x_k(1 - x_{k+1}) + x_{k+1} - 1 =$$

$$= k + 1 + x_k(1 - x_{k+1}) - (1 - x_{k+1}) = k + 1 + (1 - x_{k+1})(x_k - 1) \geq k + 1,$$

քանի որ $(1 - x_{k+1})(x_k - 1) > 0$:

Այսպիսով, $n = k$ դեպքում պնդման ճշմարիտ լինելուց հետևում է նրա ճշմարիտ լինելը $n = k + 1$ դեպքում: Պնդումն ապացուցված է:

Ապացուցման ընթացքից պարզ երևում է, որ ապացուցվելիք առնչության մեջ հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$:

Օ ր ի ն ա կ 17 **(Կոշիի անհավասարությունը)**:

Ապացուցենք, որ եթե $n \geq 2$ $(n \in \mathbb{N})$, *ապա ցանկացած* n *դրական թվերի թվաբանական միջինը փոքր չէ այդ թվերի երկրաչափական միջինից՝*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n > 0):$$

Լուծում: Դիտարկենք հետևյալ n թվերը՝

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}};\quad \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}};\ldots;\quad \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}}:$$

Ակնհայտ է, որ այդ բոլոր թվերը դրական են և դրանց արտադրյալը հավասար է 1-ի: Հետևաբար, ըստ վերոնշյալ թեորեմի, դրանց գումարը փոքր չէ n -ից՝

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}}+\frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}}\geq n,$$

որտեղից էլ կստանանք ապացուցվելիք անհավասարությունը՝

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n},$$

ընդ որում, հավասարության դեպք ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $x_1=x_2=\ldots=x_n$:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. Ապացուցել 1) -10) հատկությունները:

Ապացուցել, որ (2-39).

2. $a^2+b^2\geq 2ab$:

3. $a^2+b^2\geq 2|ab|$:

4. Եթե $a>0$, $b>0$, ապա $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$:

5. Եթե $a<0$, ապա $a+\frac{1}{a}\leq -2$;

6. $\left|a+\frac{1}{a}\right|\geq 2$:

7. $a^2+b^2\geq ab$:

8. Եթե $a+b\geq 0$, ապա $ab(a+b)\leq a^3+b^3$:

9. $a^4+b^4\geq a^3b+b^3a$:

10. Եթե $a\geq 0$, $\mathrm{b}\geq 0$, ապա $a^5+b^5\geq a^2b^3+a^3b^2$:

11. Եթե $a+b\geq 0$, ապա $\dfrac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$:

12. $a^2+2b^2+2ab+b+10>0$:

13. $a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$:

14. $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca)$:

15. $a^8-a^5+a^2-a+1>0$:

16. $\dfrac{a+b}{2}\leq\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$:

17. Եթե $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0$, ապա $(a+b)(b+c)(a+c)\geq 8abc$:

18. Եթե $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0,\ a+b+c=1$, ապա

$$(1-a)(1-b)(1-c)\geq 8abc:$$

19. Եթե $a>0,\ b>0,\ c>0$, և $a+b+c=1$, ապա

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9:$$

20. Եթե $a+\mathrm{b}+\mathrm{c}=0$, ապա $ab+bc+ca\leq 0$:

21. $|a+1|+|a-3|\geq 4$:

22. $|a-1|+|a-2|+|a-3|\geq 2$:

23. $|4a-3b|+|3a-4b|\geq|a+b|$:

24. $|b+c-a|+|a+c-b|+|a+b-c|\geq|a+b+c|$:

25. $a^4+b^4+c^4+d^4\geq 4abcd$:

26. Եթե $a>0,\ b>0,\ c>0$, ապա $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$:

27. Եթե $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0$, ապա

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\geq 6abc:$$

28. $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geq 6abc$:

29. $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$:

30. $\frac{a+b+c+d}{4}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$:

31. Եթե $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0$, ապա $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$:

32. Եթե $a>0,\ b>0,\ c>0$, ապա $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3$:

33. Եթե $a>0,\ b>0$, ապա $(a^2+a+1)(b^2+b+1)\geq 9ab$:

34*. Եթե $a>0,\ b>0,\ c>0$, ապա $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$:

35. Եթե $\mathrm{n}\geq 2,\ \mathrm{n}\in\mathrm{N}$, ապա $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$:

36. Եթե $\mathrm{n}\geq 2,\ \mathrm{n}\in\mathrm{N}$, ապա $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$:

37. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}<1 \quad (n\in N)$:

38*. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{3}{4}$:

39*. $\frac{1}{15}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{9}{100}<\frac{1}{10}$:

40. Հայտնի է, որ $x+y=10$: Գտնել x^2+y^2 արտահայտության ամենափոքր արժեքը:

41. Գտնել $x^2+y^2+z^2$ ահայտության ամենափոքր արժեքը, եթե $x+y+z\ =15$:

42. Գտնել $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ արտահայտության ամենափոքր արժեքը, եթե

$$x+y+z=1\ \left(x>0,\ t>0,\ z>0\right):$$

43*. Հայտնի է, որ $3x+4y+5z=10$: Գտնել $x^2+y^2+z^2$ արտահայտության փոքրագույն արժեքը:

44*. Հայտնի է, որ $3x+4y+5z=19$: Գտնել

$$\left(x-1\right)^2+\left(y+1\right)^2+\left(z-2\right)^2$$

արտահայտության փոքրագույն արժեքը:

45*. Հայտնի է, որ $x^2+y^2+z^2=2$: Գտնել $3x+4y+5z$ արտահայտության մեծագույն արժեքը:

46*. Հայտնի է, որ $x+y+z=1$: Գտնել $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-z^2}$ արտահայտության մեծագույն արժեքը:

47*. Հայտնի է, որ $a^3+b^3+c^3=24$, $a,b,c>0$: Գտնել $a^2+b^2+c^2$ արտահայտության մեծագույն արժեքը:

48. a,b,c դրական թվերը բավարարում են $a^2+b^2=c^2$ պայմանին: Ապացուցել, որ 2-ից մեծ ցանկացած բնական n թվի դեպքում

$$a^n+b^n<c^n:$$

49*. Հազար բնական թվերի արտադրյալը հավասար է 1000-ի: Ինչպիսի՞ ամենամեծ արժեք կարող է ընդունել այդ բոլոր թվերի գումարը:

50*. Ապացուցել անհավասարությունը՝

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{77}{78}\cdot\frac{79}{80}<\frac{1}{9}:$$

51. Դիցուք, a -ն և b-ն ցանկացած դրական թվեր են: Դիտարկենք այդ թվերի միջին հարմոնիկը (H_2), միջին երկրաչափականը (G_2), միջին թվաբանականը (A_2) և միջին քառակուսայինը (Q_2).

$$H_2=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}};\qquad G_2=\sqrt{ab};\qquad A_2=\frac{a+b}{2};\qquad Q_2=\sqrt{\frac{a^2+b2}{2}}:$$

Հայտնի է, որ $H_2\le G_2\le A_2\le Q_2$: Ապացուցել, որ

$$A_2\cdot G_2\ge H_2\cdot Q_2:$$

52. Ապացուցել, որ եթե $a_1,a_2,\ldots,a_n$ թվերից ամենափոքրը A -ն է, իսկ ամենամեծը՝ B -ն, ապա

$$A\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\le B:$$

53. Դիցուք, $a_1,a_2,\ldots,a_n$ -ը ցանկացած թվեր են, $b_1,b_2,\ldots,b_n$ -ը՝ դրական թվեր: Նշանակենք $\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\ldots,\frac{a_n}{b_n}$ կոտորակներից ամենափոքրը m -ով, ամենամեծը՝ M -ով: Ապացուցել, որ

$$m\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\le M:$$

54. Դիցուք, $a_1,a_2,\ldots,a_n$ -ը ցանկացած թվեր են, ընդ որում՝ $|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_n|$ թվերից ամենափոքրը A -ն է, ամենամեծը՝ B -ն:

Ապացուցել, որ

$$A \le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \le B:$$

55. Ապացուցել, որ ցանկացած իրական $a_1, a_2, \ldots, a_n$ թվերի համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \le n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2):$$

56. Ապացուցել, որ $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$ պայմանին բավարարող ցանկացած $a_1, a_2, \ldots, a_n$ և $b_1, b_2, \ldots, b_n$ թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le 1:$$

57. Ապացուցել, որ ցանկացած դրական $a_1, a_2, \ldots, a_n$ թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \ge n^2:$$

58*. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական $n \ge 2$ դեպքում

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}:$$

59*. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1:$$

60. Ապացուցել, որ ցանկացած դրական p թվի և $n \geq 2$ բնական թվի դեպքում ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\sqrt[n]{1+p} < 1 + \frac{p}{n}:$$

61. Ո՞ր թիվն է մեծ.

$(1,01)^{100}$ -ը, թե՞ 2-ը:

Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում ճիշտ է (62-64),

62*. $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}:$$

63*. $$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}:$$

64*. $$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1}-2:$$

65*. Ապացուցել, որ եթե $1 \leq a \leq 2, \quad 1 \leq b \leq 3, \quad 1 \leq c \leq 4$, ապա

$$(a+b+c)\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}\right) \leq 36:$$

66*. Ապացուցել անհավասարությունը՝

$$\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a}} > \frac{3}{2}, \text{ որտեղ } \quad a>0, \quad b>0, \quad c>0:$$

67*. Հայտնի, է որ $x+y+z=5$ և $xy+yz+zx=8$: Ապացուցել՝

$$x, y, z \in \left[1; \frac{7}{3}\right]:$$

68. Ապացուցել, որ ցանկացած իրական $a_1, a_2, ..., a_n$ և ցանկացած դրական $b_1, b_2, ..., b_n$ թվերի դեպքում ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}:$$

69*. Ապացուցել, որ եթե $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$ դրական թվերը բավարարում են $a_1+a_2+...+a_n=1$ և $b_1+b_2+...+b_n=1$ պայմաններին, ապա

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n} \geq 1:$$

70*. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում

$$n < \sqrt{2}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+...+\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}} < n+1:$$

71*. Ապացուցել, որ գոյություն ունի այնպիսի բնական n թիվ, որի համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} > 2000:$$

72*. Ապացուցել, որ ցանկացած դրական $a_1, a_2, \ldots, a_n$ թվերի համար ճիշտ են հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}:$$

§ 4. ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ

1. Ընդհանուր տեղեկություններ

1⁰. Ս ա հ մ ա ն ու մ: x փոփոխականի նկատմամբ **բազմանդամ** է կոչվում

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

տեսքի արտահայտությունը, որտեղ n -ը ոչբացասական ամբողջ թիվ է, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ -ը որոշ իրական թվեր են:

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ թվերն անվանում են բազմանդամի **գործակիցներ**. a_0 գործակիցն անվանում են նաև **ազատ** անդամ, $a_n x^n$ գումարելին՝ **ավագ անդամ**, a_n -ը՝ **ավագ** գործակից:

Եթե $a_n \neq 0$, ապա n թիվը կոչվում է բազմանդամի **աստիճան**, համապատասխան բազմանդամը՝ n -րդ աստիճանի բազմանդամ: (1) տեսքն անվանում են n-րդ աստիճանի բազմանդամի **կանոնական** կամ **ստանդարտ** տեսք: Մեկ փոփոխականով բազմանդամները ներկայացնելիս ամենուրեք պահպանում են նրա ստանդարտ տեսքը:

x փոփոխականով բազմանդամների համար, կրճատ գրելաձևի նպատակով, սովորաբար գործածում են P(x), Q(x), R(x),… նշանակումները: Եթե ցանկանում են ընդգծել, որ P(x) բազմանդամը n -րդ աստիճանի է, ապա բառերի փոխարեն երբեմն հակիրճ գրառում են՝ $P_n(x)$:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ բազմանդամի **արժեքը** $x = b$ դեպքում (b կետում) կոչվում է

$$P(b) = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 \text{ թիվը:}$$

$P_0(x)=a_0 \quad (a_0 \neq 0)$ զրո աստիճանի բազմանդամները զրոյից տարբեր իրական թվերն են: Եթե (1) բազմանդամի բոլոր գործակիցները հավասար լինեն զրոյի, ապա այն կունենա $0x^n+0x^{n-1}+\ldots+0x+0$ տեսքը և ցանկացած x-ի ու բնական n թվի դեպքում հավասար կլինի 0-ի: Այդ նկատառումով էլ 0 թիվը նույնպես համարում են բազմանդամ և անվանում՝ **զրոյական**: Զրոյական բազմանդամը միակ բազմանդամն է, որը չունի աստիճան: Պայմանավորվենք՝ զրոյական $P(x)$ բազմանդամի համար գործածել $P(x)\equiv 0$ գրառումը և կարդալ՝ $P(x)$-ը նույնաբար հավասար է 0-ի: Այն փաստը, որ $P(x)$ բազմանդամը զրոյական չէ, հակիրճ գրառվում է այսպես՝ $P(x)\not\equiv 0$:

$P_n(x)$ և $Q_m(x)$ բազմանդամները համարվում են **հավասար** (գրում են՝ $P_n(x)=Q_m(x)$, երբեմն նաև՝ $P_n(x)\equiv Q_m(x)$), եթե $n=m$ և հավասար են նաև x-ի միևնույն աստիճանի համապատասխան գործակիցները: Այլ կերպ՝ հավասար բազմանդամներն այն բազմանդամներն են, որոնք ունեն միևնույն ստանդարտ տեսքը:

2⁰. Բազմանդամների տեսության մեջ առանձնահատուկ տեղ են զբաղեցնում բազմանդամների բաժանելիությանը վերաբերող հարցերը: Հանգամանորեն քննարկենք այդ հարցերը:

Դիցուք, $P(x)$-ը n-րդ աստիճանի $(n\in N)$ բամզանդամ է, իսկ $Q(x)$–ը՝ ոչ զրոյական բազմանդամ:

Եթե գոյություն ունի այնպիսի T(x) բազմանդամ, որ ցանկացած x–ի դեպքում տեղի ունի

$$P(x)=T(x)\cdot Q(x)$$

*հավասարությունը, ապա ասում են, որ P(x) բազմանդամը **բաժանվում է** Q(x) բազմանդամի վրա:*

Այդ դեպքում T(x) բազմանդամը կոչվում է P(x) բազմանդամը Q(x)-ի բաժանելիս ստացված **քանորդ**: Ինչպես բնական թվերի բազմությունում, այնպես էլ բազմանդամների բազմությունում միշտ չէ, որ բաժանումն իրագործելի է:

Օրինակ, $P(x)=x^2+5$ բազմանդամը չի բաժանվում $Q(x)=x-2$ բազմանդամի վրա (ինչո՞ւ):

Սակայն տեղի ունի ավելի ընդհանուր գործողություն, որը կոչվում է **մնացորդով բաժանում**: Դիցուք՝ տրված են 1–ից ոչ ցածր աստիճանի P(x) բազմանդամը և ոչ զրոյական Q(x) բազմանդամը: Ընդունված է ասել, որ P(x) **բազմանդամը մնացորդով բաժանվում է Q(x)** (ոչ զրոյական) **բազմանդամի վրա, եթե գոյություն ունեն այնպիսի** T(x) **և** R(x) **բազմանդամներ, որ ցանկացած** x**-ի դեպքում տեղի ունենա**

P(x) = Q(x). T(x) + R(x) **հավասարությունը, ընդ որում** R(x)**-ի աստիճանը փոքր լինի** Q(x)**-ի աստիճանից կամ** R(x) ≡ 0:

Այդ դեպքում T(x) բազմանդամը կոչվում է **ոչ լրիվ քանորդ**, իսկ R(x) -ը՝ **մնացորդ՝** P(x) բազմանդամը Q(x) բազմանդամի **բաժանելիս:**

Եթե $R(x)\equiv 0$[1], ապա ասում են, որ P(x) -ն ամբողջությամբ (առանց մնացորդի) **բաժանվում է** Q(x) -ի և գրում են՝ $P(x)\vdots Q(x)$: Այդ դեպքում Q(x) -ը կոչվում է P(x) բազմանդամի **բաժանարար**:

Դիտարկենք մասնավոր դեպքեր:

Երբ $P(x)\equiv 0$, իսկ $Q(x)$–ը կամայական ոչ զրոյական բազմանդամ է, ապա $T(x)\equiv 0$ և $R(x)\equiv 0$ բազմանդամները կբավարարեն սահմանման պայմաններին:

Այն դեպքում, երբ P(x) բազմանդամի աստիճանը փոքր է Q(x)–ի աստիճանից, ապա P(x)–ը կարելի է ներկայացնել այսպես՝

P(x) = Q(x) .0+P(x):

Քանի որ P(x)-ի աստիճանը փոքր է Q(x)-ի աստիճանից, ապա P(x)-ն էլ հենց մնացորդն է: Այնպես, որ այդ դեպքում ևս P(x)-ը մնացորդով բաժանվում է Q(x)-ի վրա: Օրինակ, $P(x)=x^2+x+1$ բազմանդամը $Q(x)=3x^4-x^3+1$ բազմանդամի վրա բաժանումն իրագործվում է

$x^2+x+1=(3x^4-x^3+1)\cdot 0+x^2+x+1$ հավասարությամբ (T(x) քանորդը զրոյական բազմանդամ է, իսկ մնացորդը՝ $R(x)=x^2+x+1$):

[1]« $P(x) \equiv 0$ » կարդում են՝ « $P(x)$ -ը նույնաբար հավասր է զրոյի, այսինքն՝ ցանկացած x -ի դեպքում $P(x)=0$:

Որպես օրինակ, $P(x)=6x^4-7x^3+9x^2-3$ բազմանդամը բաժանենք $Q(x)=3x^2+x$ բազմանդամի վրա: Ըստ սահմանման՝ մեզ անհրաժեշտ է գտնել այնպիսի Q(x) և R(x) բազմանդամներ, որ $P(x)=T(x)\cdot Q(x)+R(x)$ հավասարությունը լինի նույնություն և բացի այդ, R(x)–ի աստիճանը փոքր լինի Q(x)–ի աստիճանից: Ամենից առաջ նկատենք, որ T(x) քանորդի ավագ անդամը պետք է լինի $6x^4:3x^2=2x^2$: Կազմենք հետևյալ տարբերությունը՝

$$P(x)-2x^2Q(x)=-9x^3+9x^2-3:$$

Ստացված բազմանդամը նշանակենք E(x)–ով: Քանի որ E(x)–ի աստիճանը մեծ է Q(x)–ի աստիճանից, շարունակում ենք բաժանման պրոցեսը: Այն նկատառումով, որ E(x)–ի և Q(x)–ի ավագ գործակիցների հարաբերությունը հավասար է –3x–ի, այժմ կազմենք հետևյալ տարբերությունը՝

$$E(x)-(-3x)\cdot T(x)=-9x^3+9x^2-3-(-3x)(3x^2+x)=12x^2-3=F(x):$$

F(x)–ի աստիճանը հավասար է Q(x)–ի աստիճանին: Հաշվի առնելով այն, որ F(x)–ի և Q(x)–ի ավագ գործակիցների հարաբերությունը հավասար է 4–ի, կազմենք հետևյալ տարբերությունը՝

$$F(x)-4Q(x)=(12x^2-3)-4(3x^2+x)=-4x-3=R(x):$$

R(x)–ի աստիճանը փոքր է T(x)–ի աստիճանից: Հետևաբար, – 4x–3–ը P(x) բազմանդամը Q(x) բազմանդամի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդն է: Այսպիսով, ստանում ենք.

$$6x^4-7x^3+9x^2-3=(3x^2+x)(2x^2-3x+4)+(-4x-3):$$

Այստեղ քանորդը $T(x)=2x^2-3x+4$ բազմանդամն է:

Բերված օրինակը ցույց է տալիս, որ անկյունաձև բաժանումով ցանկացած P(x) բազմանդամ կարելի է բաժանել ցանկացած ոչզրոյական Q(x) բազմանդամի վրա, եթե միայն P(x)–ի աստիճանը փոքր չէ Q(x)–ի աստիճանից և Q(x)–ը ոչզրոյական բազմանդամ է:

$P(x)$ բազմանդամը $Q(x)$ բազմանդամի վրա բաժանելու համար կարելի է ընդունել հետևյալ ալգորիթմը.

1) *բաժանելին և բաժանարարը դասավորել ստանդարտ տեսքով (x–ի աստիճանների նվազման կարգով),*
2) *բաժանելիի ավագ անդամը բաժանել բաժանարարի ավագ անդամի վրա և ստացված միանդամը համարել քանորդի ավագ անդամ,*
3) *քանորդի ավագ անդամը բազմապատկել բաժանարարով և արդյունքը հանել բաժանելիից. ստացված տարբերությունը հանդիսանում է առաջին մնացորդը,*
4) *քանորդի հաջորդ գումարելին ստանալու համար անհրաժեշտ է առաջին մնացորդի հետ վարվել այնպես, ինչպես վերը նշված 2–րդ և 3–րդ կետերում:*

Այս ընթացակարգն անհրաժեշտ է շարունակել այնքան, քանի դեռ չի ստացվել զրո մնացորդ կամ այնպիսի մնացորդ, որի աստիճանը փոքր է բաժանարարի աստիճանից:

Բնական հարց է ծագում. ցանկացած $P(x)$ և $Q(x)$ բազմանդամների համար հնարավո՞ր է, արդյոք, իրագործել մնացորդով բաժանում: Հետևյալ թեորեմն այդ հարցին տալիս է դրական պատասխան:

Թ ե ո ր և մ: **Կամայական** $P(x)$ **և ոչ զրոյական** $Q(x)$ **բազմանդամների համար *գոյություն ունեն* այնպիսի** $T(x)$ **և** $R(x)$ **բազմանդամներ, որ**

$$P(x)=Q(x)T(x)+R(x), \qquad (2)$$

ընդ որում, $R(x)$**-ի աստիճանը փոքր է** $Q(x)$**-ի աստիճանից կամ** $R(x)\equiv 0$: Այդպիսի $T(x)$ և $R(x)$ բազմանդամները որոշվում են միարժեքորեն:

Գոյություն ունեն տարբեր եղանակներ՝ երկու բազմանդամների բաժանելուց ստացված քանորդը և մնացորդը որոշելու համար: Ամենից հաճախ օգտվում են «անկյունաձև» բաժանման եղանակից: Ցածր դասարաններից հայտնի թվերի բաժանման «անկյունաձև» եղանակի հիմքում ընկած է թվերի մնացորդով բաժանման հայտնի կանոնը: Քանի որ այդ կանոնը ճիշտ է նաև բազմանդամների համար, ապա արդյունքում ստանում ենք բազմանդամների բաժանման համանման եղանակ:

$6x^4-7x^3+9x^2-3$ բազմանդամը $(3x^2+x)$-ի վրա «անկյունաձև բաժանումը» տարվում է այսպես.

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{-\begin{array}{r}6x^4-7x^3+9x^2-3\\ 6x^4+2x^3\end{array}} & \underline{3x^2+x}\\
\underline{-\begin{array}{r}-9x^3+9x^2-3\\ -9x^3-3x^2\end{array}} & 2x^2-3x+4\\
\underline{-\begin{array}{r}12x^2-3\\ 12x^2+4x\end{array}} & \\
-4x-3 &
\end{array}
$$

Հետևաբար,

$$6x^4-7x^3+9x^2-3=(3x^2+x)(2x^2-3x+4)+(-4x-3),$$

այսինքն, $Q(x)=2x^2-3x+4$ բազմանդամը քանորդն է, իսկ $R(x)=-4x-3$-ը՝ մնացորդը:

Ապացուցենք բազմանդամների բաժանման միակությունը:

Ենթադրենք հակառակը՝ $P(x)$ բազմանդամը $Q(x)$ բազմանդամի վրա բաժանումը կարելի է իրականացնել երկու ձևով.

$$P(x)=Q(x)\cdot T_1(x)+R_1(x) \quad \text{և} \quad P(x)=Q(x)\cdot T_2(x)+R_2(x):$$

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$R_1(x)-R_2(x)=Q(x)\,(T_1(x)-T_2(x)):$$

Եթե $T_1(x)-T_2(x)$ տարբերությունը չլինի զրոյական բազմանդամ, ապա $R_1(x)-R_2(x)$ բազմանդամը կբաժանվի $T(x)$ բազմանդամի վրա, որը հնարավոր չէ, քանի որ $\left(R_1(x)-R_2(x)\right)$–ի աստիճանը փոքր է $T(x)$–ի աստիճանից: Ստացված հակասությունը ցույց է տալիս, որ $R_1(x)\equiv R_2(x)$ և $T_1(x)\equiv T_2(x)$: Հետևաբար, մնացորդով բաժանումն իրականացվում է միակ եղանակով:

Բազմանդամների բաժանելիության վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս երբեմն կիրառվում է նաև, այսպես կոչված, **անորոշ գործակիցների մեթոդը:**

Վերը նշված բազմանդամների համար որոնելի քանորդը և մնացորդն այդ մեթոդով գտնում են հետևյալ կերպ: Քանի որ առաջին բազմանդամը 4-րդ աստիճանի է, իսկ մյուսը՝ 2-րդ, ուստի քանորդը փնտրում են $T(x)=ax^2+bx+c$ տեսքով, իսկ մնացորդը՝ $\mathrm{R(x)=dx+e}$ տեսքով (առայժմ $\mathrm{a,b,c,d,e}$ գործակիցները հայտնի չեն (**անորոշ են**)): Ըստ (2) հավասարության՝

$$6x^4-7x^3+9x^2-3=(3x^2+x)(ax^2+bx+c)+dx+e:$$

Այս հավասարության (նույնության) աջ մասը ներկայացնելով բազմանդամի ստանդարտ տեսքով, և օգտվելով բազմանդամների հավասարության պայմանից, կունենանք հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} 6=3a, \\ -7=3b+a, \\ 9=3c+b, \\ 0=c+d, \\ -3=e: \end{cases}$$

Այդ համակարգից կստանանք՝

$a=2,\ b=-3,\ c=4,\ d=-4,\ e=-3$: Նշանակում է՝

$$T(x)=2x^2-3x+4, \qquad R(x)=-4x-3:$$

Դիտողություն: Ընդհանրապես, անորոշ գործակիցների մեթոդի էությունը կայանում է հետևյալում: $P_n(x)$ բազմանդամը $Q_m(x)$ $(n\geq m)$ բազմանդամի վրա բաժանելիս նախապես հեշտությամբ կարելի է որոշել $\mathrm{T(x)}$ քանորդի և $\mathrm{R(x)}$ մնացորդի տեսքերը ($T(x)$-ը $\mathrm{(n-m)}$ աստիճանի բազմանդամ է, իսկ $R(x)$-ը ՝ $(m-1)$-ից ոչ բարձր աստիճանի: Սակայն հնարավոր չէ անմիջապես որոշել այդ բազմանդամների անհայտ (անորոշ) գործակիցները: (2) նույնության մեջ $P_n(x)$-ը, $Q_m(x)$-ը, $T(x)$-ը և $R(x)$-ը փոխարինում են իրենց արտահայտություններով: Այնուհետև, այդ հավասարության աջ մասը բերում են ստանդարտ տեսքի (ձախ մասն արդեն այդպիսին է), որից հետո համեմատում են աջ և ձախ մասերի x-ի միևնույն աստիճանների գործակիցները: Արդյունքում ստանում են հավասարումների համակարգ, որը հնարավորություն է տալիս գտնելու որոնելի գործակիցները (որով և հայտնի են դառնում քանորդ և մնացորդ բազմանդամները):

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. Գտնել P(x) բազմանդամը Q(x) բազմանդամի բաժանելիս ստացվող քանորդը և մնացորդը.

ա) $P(x)=x^4+x^2-x-3$, $Q(x)=x^2+1$;

բ) $P(x)=2x^6-3x^5+5x^3-6$, $Q(x)=x^3+x+1$;

գ) $P(x)=x^{10}+2$, $Q(x)=x^5-1$;

դ) $P(x)=x^7-1$, $Q(x)=x-1$;

ե) $P(x)=x^2-x+1$, $Q(x)=2x^4+x^3$:

2. Բաժանվո՞ւմ է արդյոք $x^{100}-8x^{20}+7$ բազմանդամը x^2-1 բազմանդամի վրա:

3. Ապացուցել, որ x^5+1 բազմանդամը $x^{30}-x^{15}-x^{20}+x^5$ բազմանդամի բաժանարար է:

4. Ապացուցել, որ $x^{20}+x^{19}+1$ բազմանդամը բաժանվում է x^2+x+1-ի վրա:

5. m-ի և n-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում x^3+mx+n բազմանդամն առանց մնացորդի կբաժանվի $x^2+3x+10$ եռանդամի վրա:

6. Անորոշ գործակիցների մեթոդով $x^4-12x^3+43x^2-42x+6$ բազմանդամը վերածել բազմապատկիչների:

7. Գտնել $(3x^2-2)^{100}(x+1)^{10}$ արտահայտության փակագծերը բացելիս և նման անդամների միացումից հետո ստացված բազմանդամի՝
ա) բոլոր գործակիցների գումարը,
բ) x-ի զույգ ցուցիչով աստիճանների բոլոր գործակիցների գումարը,
գ) x-ի կենտ ցուցիչով աստիճանների բոլոր գործակիցների գումարը:

8. Ապացուցել, որ եթե n-ը 3-ին բազմապատիկ բնական թիվ է, ապա x^n-1-ը բաժանվում է x^2+x+1-ի վրա:

9. a-ի և b-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $x^5+ax^4-3x^2+bx-10$ բազմանդամը կբաժանվի x^2+x-2 բազմանդամի վրա:

10. Գտնել p-ի և q-ի բոլոր այն արժեքները, որոնց դեպքում

$$x^4-p^2x^3+74x^2+qx+25$$

բազմանդամը հանդիսանում է x-ի նկատմամբ ամբողջ գործակիցներով երկրորդ աստիճանի բազմանդամի քառակուսի:

11. $9x^4-6x^3-ax^2-4x+4$ բազմանդամը ներկայացնել եռանդամի քառակուսու տեսքով: Ի՞նչ a-երի դեպքում է դա հնարավոր:

12. Գտնել p-ի և q-ի բոլոր այն արժեքները, որոնց դեպքում x^4+1-ը բաժանվում է x^2+px+q-ի վրա:

13. Ընտրել c և d թվերն այնպես, որ $6x^4-7x^3+cx^2+3x+2$ բազմանդամը բաժանվի x^2-x+d–ի վրա:

14. Գտնել a, b, c գործակիցներն այնպես, որ

$$f(x)=x^4+4mx^3+6ax^2+4bx+c$$

բազմանդամը բաժանվի $g(x)=x^3+3mx^2+3ax+b$ բազմանդամի վրա:

15. $P(x)=ax^2+bx+c$ քառակուսային եռանդամն այնպիսին է, որ $P(0)$,

$P(-1)$ և $P(1)$ թվերն ամբողջ են: Ապացուցել, որ ցանկացած ամբողջ x -ի դեպքում $P(x)$ -ը ամբողջ է:

16. Տրված են քառակուսային երկու եռանդամներ, որոնց ավագ գործակիցները հավասար են: Որոշել առաջին եռանդամը երկրորդի և երկրորդ եռանդամը առաջինի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդների գումարը:

17. Ապացուցել, որ $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+1$ բազմանդամը ցանկացած ամբողջ x -ի դեպքում ընդունում է ամբողջ արժեք: Գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայման՝ ըստ որի ax^3+bx^2+cx+d բազմանդամը ցանկացած ամբողջ x -ի դեպքում ընդունի ամբողջ արժեք:

18*. Ապացուցել, որ ամբողջ գործակիցներով և ոչ մի $P(x)$ բազմանդամի համար չեն կարող տեղի ունենալ $P(9)=18$ և $P(13)=80$ պայմանները:

19*. $P(x)$ բազմանդամը x -ի ցանկացած ամբողջ արժեքի դեպքում ընդունում է ամբողջ արժեք: Կարո՞ղ է նրա գործակիցներից մեկը հավասար լինել $\frac{1}{13}$ -ի:

20*. Կազմել n -ից ոչ բարձր աստիճանի այնպիսի բազմանդամ, որը տրված՝ իրարից տարբեր $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ արժեքների դեպքում ընդունի համապատասխանաբար, $y_0, y_1, \ldots, y_n$ արժեքները:

21*. Ի՞նչ պայմանի դեպքում $x^m+x^{m-1}+\cdots x^2+x+1$ բազմանդամը կբաժանվի $x^k+x^{k-1}+\cdots x+1$ բազմանդամի վրա: Նշել ճիշտ պատասխանը.

1) $m>k$, 2) $m=2k$, 3) $m \vdots n$, 4) $(m+1) \vdots (k+1)$:

22*. Ամբողջ գործակիցներով երկու բազմանդամների արտադրյալ բազմանդամի բոլոր գործակիցները զույգ են, ընդ որում նրանցից առնվազն մեկը չի բաժանվում 4–ի: Ապացուցել, որ տրված բազմանդամներից մեկի բոլոր գործակիցները զույգ են:

23*. Ապացուցել, որ ցանկացած $m, n, k \in N$ դեպքում $x^{3m+2} + x^{3n+1} + x^{3k}$ բազմանդամը բաժանվում է $x^2 + x + 1$ բազմանդամի վրա:

2. Բեզուի թեորեմը: բազմանդամի արմատներ

Առանձնակի հետաքրքրություն է ներկայացնում $P(x)$ բազմանդամն առաջին աստիճանի՝ $x - a$ տեսքի բազմանդամի վրա բաժանելիության հարցը: Դիցուք,

$$P(x) = (x - a)T(x) + r,$$

որտեղ T(x)-ը քանորդն է, իսկ r մնացորդը մի որոշ իրական թիվ է: Եթե այդ նույնության մեջ տեղադրենք $x = a$, ապա կստանանք $P(a) = r$ թվային ճիշտ հավասարությունը: Դրանով իսկ ապացուցվում է հետևյալ պնդումը.

Թ ե ո ր ե մ : $P(x)$ **բազմանդամը** $(x - a)$**-ի վրա բաժանելիս ստացված մնացորդը հավասար է** $P(x)$ **բազմանդամի արժեքին՝** $x = a$ **դեպքում** (Բեզուի թեորեմ[3]):

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն : Դժվար չէ համոզվել, որ $P(x)$ բազմանդամը $Q(x) = ax + b$ առաջին աստիճանի բազմանդամի վրա բաժանելիս ստացված մնացորդը հավասար է այդ բազմանդամի արժեքին՝ $x = -\frac{b}{a}$ կետում, այսինքն՝ $R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$:

Օ ր ի ն ա կ 1 : *Գտնենք* $P(x) = x^5 - x^4 + 3x^2 - 7x + 11$ *բազմանդամը* $(x + 2)$ *-ի վրա բաժանելիս ստացվող մնացորդը:*

Լուծում: Բեզուի թեորեմի համաձայն $P(x)$-ը $x - (-2)$ երկանդամի բաժանելիս ստացվող մնացորդը հավասար է $P(-2)$-ի: Հետևաբար, որոնելի մնացորդը՝

---

[3] Այդ պնդումն առաջին անգամ ձևակերպել և ապացուցել է ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Էտյեն Բեզուն (1730-1783), որի հիմնական աշխատանքները վերաբերում են բարձրագույն հանրահաշվին:

$$P(-2)=(-2)^5-(-2)^4+3(-2)^2-7(-2)+11=-11:$$

Օ ր ի ն ա կ 2: *Գտնենք* (x^n+b^n) *-ը* $(x+b)$ *-ի վրա բաժանելիս ստացվող մնացորդը, որտեղ* $n\in N,\ \ b\neq 0$:

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Քանի որ $x+b=x-(-b)$, ուստի որոնելի մնացորդը գտնելու համար բավական է $P(x)=x^n+b^n$ արտահայտության մեջ x -ի փոխարեն տեղադրել $-b$: Կունենանք՝

$$P(-b)=(-b)^n+b^n=\begin{cases}0, & \text{եթե } n\text{-ը կենտ է,}\\ 2b^n, & \text{եթե } n\text{-ը զույգ է:}\end{cases}$$

Միաժամանակ ապացուցում ենք, որ (x^n+b^n) -ը բաժանվում է $(x+b)$ -ի այն և միայն այն դեպքում, երբ n -ը կենտ է:

Օ ր ի ն ա կ 3: *Ապացուցենք, որ ցանկացած բնական n թվի դեպքում*

$$P(x)=nx^n+(n-1)x^{n-1}+\dots+2x^2+x-\frac{n^2+n}{2}$$

բազմանդամը բաժանվում է $(x-1)$ *-ի վրա:*

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Գտնենք $P(x)$ -ի արժեքը $x=1$ կետում.

$$P(1)=n+(n-1)+\dots+2+1-\frac{n^2+n}{2}=\frac{1+n}{2}\cdot n-\frac{n^2+n}{2}=0:$$

Նշանակում է՝ $P(x)$ բազմանդամը $(x-1)$ -ի բաժանելիս ստացված մնացորդը հավասար է 0-ի (ըստ Բեզուի թեորեմի): Հետևաբար, $P(x)$ -ը բաժանվում է $x-1$ գծային երկանդամի վրա:

Դիցուք, $P(x)$ –ը n–րդ աստիճանի բազմանդամ է.

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\quad(a_n\neq 0):$$

Եթե $P(x)$ բազմանդամի արժեքը $x=a$ դեպքում հավասար է զրոյի, այսինքն՝ $P(a)=0$, ապա a թիվը կոչվում է $P(x)$ բազմանդամի **արմատ:** Այդ դեպքում նաև ասում են, որ a թիվը x փոփոխականով (անհայտով)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (3)$$

հավասարման **արմատ է**:

(3) հավասարումն անվանում են n-րդ աստիճանի **հանրահաշվական հավասարում: Լուծել (3) հավասարումը** նշանակում է՝ գտնել նրա բոլոր արմատները, կամ, որ նույնն է՝ գտնել $P(x)$ բազմանդամի բոլոր արմատները: Վերն ասվածից հետևում է, որ $P(x) = 0$ հավասարման լուծման խնդիրը համարժեք է $P(x)$ բազմանդամի առաջին աստիճանի (գծային) արտադրիչներն առանձնացնելու խնդրին:

Դիտողություն: $n = 1$ և $n = 2$ դեպքերում (3) հավասարումը վերածվում է, համապատասխանաբար, առաջին և երկրորդ աստիճանի (քառակուսային) հավասարումների, որոնց արմատները գտնելու կանոնները հայտնի են միջին դպրոցի դասընթացից:

Թեև երրորդ և չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումների համար ևս գոյություն ունեն արմատները գտնելու բանաձևեր (որոնք ուսումնասիրվում են բուհերում դասավանդվող բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացում), սակայն դրանք այնքան մեծածավալ են (ներկայացվում են բազմաթիվ բարդ արմատների միջոցով), որ նախընտրում են չօգտվել դրանցից (բարձրագույն մաթեմատիկայում մշակված են տարբեր մեթոդներ, որոնք հնարավորություն են տալիս ուզած ճշգրտությամբ գտնելու հանրահաշվական հավասարման արմատների մոտավոր արժեքները):

Չորրորդից բարձր աստիճանի հանրահաշվական հավասարումների արմատների համար նման բանաձևեր, ընդհանուր դեպքում, գոյություն չունեն: Այդ կարևոր փաստը XIX դարի 20-ական թվականներին ապացուցել է նորվեգացի մաթեմատիկոս Ն. Աբելը (1802-1829):

* * *

Նախորդ կետում դիտարկված Բեզուի թեորեմից հետևում են հետևյալ կարևոր պնդումները.

Թեորեմ 1: **Եթե α թիվը $P(x)$ բազմանդամի արմատ է, ապա այդ բազմանդամը բաժանվում է $(x-\alpha)$-ի վրա:**

Ապացուցում: Բեզուի թեորեմի համաձայն P(x) բազմանդամը $(x-\alpha)$–ի բաժանելիս ստացվում է $P(\alpha)$ մնացորդը: Քանի որ, ըստ պայմանի՝ $P(\alpha)=0$, ուստի, իրոք, P(x)–ը բաժանվում է $(x-\alpha)$–ի վրա:

Թ ե ո ր ե մ 2: **Եթե P(x) բազմանդամը բաժանվում է $(x-\alpha)$-ի վրա, ապա α թիվը P(x) բազմանդամի արմատ է, այսինքն՝** $P(\alpha)=0$:

Այս թեորեմի ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն:

Թ ե ո ր ե մ 3: **Եթե P(x) բազմանդամն ունի զույգ առ զույգ միմյանցից տարբեր $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ արմատներ, ապա այն բաժանվում է $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$ արտադրյալի վրա:**

Ապացուցում: Թեորեմ 1–ի համաձայն P(x)–ը բաժանվում է $(x-\alpha_1)$–ի վրա: Քանորդում ստացվող բազմանդամը նշանակենք $T(x)$–ով.

$$P(x)=(x-\alpha_1)T(x): \qquad (1)$$

Այս նույնության մեջ տեղադրելով $x=\alpha_2$, կստանանք՝

$$P(\alpha_2)=(\alpha_2-\alpha_1)\cdot T(\alpha_2)$$

թվային ճիշտ հավասարությունը: Քանի որ, ըստ պայմանի, $P(\alpha_2)=0$ և $\alpha_2-\alpha_1\neq 0$, ուստի $T(\alpha_2)=0$: Այդ նշանակում է, որ $x=\alpha_2$ –ը $T(x)$ բազմանդամի արմատ է: Հետևաբար, ըստ թեորեմ 1–ի, $T(x)$–ը բաժանվում է $(x-\alpha_2)$–ի վրա: Դիցուք, այդ բաժանման արդյունքում քանորդում ստացվում է $Q(x)$ բազմանդամը: Այդ նկատառումով (1) հավասարությունը կներկայացվի հետևյալ կերպ.

$$P(x)=(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\,Q(x):$$

Այդ նույնության մեջ տեղադրելով $x=\alpha_3$ և հաշվի առնելով թեորեմի պայմանները, համոզվում ենք, որ $Q(\alpha_3)=0$, այսինքն՝ $Q(x)$-ը բաժանվում է $(x-\alpha_3)$-ի վրա:

Նույն ձևով շարունակելով մնացած արմատների համար՝ ի վերջո կհասնենք այսպիսի հավասարության՝

$$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)\cdot F(x),$$

որտեղ $F(x)$–ը որևէ բազմանդամ է:

Ստացված հավասարությունն էլ հիմնավորում է, որ $P(x)$ բազմանդամը բաժանվում է $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ արտադրյալի վրա:

Հետևանք: **n-րդ աստիճանի $P(x)$ բազմանդամը չի կարող ունենալ իրարից տարբեր n-ից ավելի արմատներ:**

Հակասող ընդունելության եղանակով (ենթադրելով, որ $P(x)$-ը կարող է ունենալ $n+1$ արմատ), վերջին թեորեմի հիման վրա անմիջապես կգանք հակասության (համոզվեք դրանում):

Վերոնշյալ թեորեմներից կարող են ստացվել հետաքրքիր և օգտակար պնդումներ, մասնավորաբար, բազմանդամն արտադրիչների վերածելու բանաձևը, Վիետի ընդհանրացված բանաձևերը և այլն:

3. Վիետի ընդհանրացված թեորեմը

Դիցուք, $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ բազմանդամն ունի իրարից տարբեր n արմատ՝ α_1, α_2, …, α_n:

Այդ դեպքում այն բաժանվում է

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

արտադրյալի վրա (թեորեմ 3), ընդ որում ստացված քանորդը մի որոշ հաստատուն b թիվ է (կախված չէ x-ից).

$$P_n(x)=b(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n): \qquad (4)$$

Եթե (4) նույնության աջ մասը ներկայացնենք բազմանդամի ստանդարտ տեսքով և համեմատենք նրա երկու մասերի ավագ գործակիցները, ապա կստանանք՝ $b=a_n$: Հետևաբար,

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)\,[1]: \qquad (4')$$

Այնուհետև, համեմատելով ձախ և աջ մասերի՝ x-ի միևնույն աստիճանի մնացած համապատասխան գործակիցները, կունենանք

[1] (4′) հավասարությունը, ըստ էության, բազմանդամը գծային արտադրիչների վերածելու բանաձևն է:

առնչություններ բազմանդամի արմատների և նրա գործակիցների միջև, որոնք կրում են **Վիետի բանաձևեր** անվանումը.

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n},\\
&\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_2\alpha_n+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n=-\frac{a_{n-2}}{a_n},\\
&\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_{n-3}}{a_n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n=-(1)^n\frac{a_0}{a_n}:
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը.

Եթե $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ իրական թվերը բավարարում են (5) համակարգին, ապա դրանք

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

բազմանդամի արմատներն են:

(5) համակարգի հավասարությունները կոչվում են **Վիետի բանաձևեր:**

Մասնավորապես, երկրորդ աստիճանի ax^2+bx+c բազմանդամի x_1 և x_2 արմատների համար կունենանք.

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}:$$

Եթե x_1, x_2, x_3 թվերը երրորդ աստիճանի

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d\quad(a\neq 0)$$

բազմանդամի արմատներն են, ապա Վիետի բանաձևերը կունենան հետևյալ տեսքը.

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},\qquad x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{c}{a},\qquad x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}:$$

Եթե բնական k թիվն այնպիսին է, որ $P(x)$ բազմանդամն առանց մնացորդի բաժանվում է $(x-\alpha)^k$ -ի վրա, բայց չի բաժանվում $(x-\alpha)^{k+1}$ -ի վրա, ապա ասում են, որ α -ն $P(x)$ բազմանդամի համար k -**պատիկ արմատ է:**

Օրինակ, $(x-5)^3(x+1)^4(x+4)(x-7)$ արտահայտությունից ստացվող բազմանդամի համար 5 արմատի պատիկությունը երեքն է, –1-ինը՝ չորս, – 4 և 7 արմատներինը՝ մեկ:

Բազմանդամի միապատիկ $(k=1)$ արմատն անվանում են նաև **պարզ** արմատ: Բերված օրինակում – 4 և 7 արմատները նշված բազմանդամի պարզ արմատներն են:

Դիտողություն 1: Վիետի բանաձևերը մնում են ուժի մեջ նաև այն դեպքում, երբ բազմանդամի համար առկա են բազմապատիկ (k -պատիկ, որտեղ $k \geq 2$) արմատներ: Այդ դեպքում անհրաժեշտ է միայն յուրաքանչյուր այդպիսի արմատը գրել այնքան անգամ, որքան նրա պատիկությունն է:

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն 2 : Դժվար չէ կռահել, որ Վիետի բանաձևերի k–րդ (k=1, 2, . . . , n) տողում գտնվող հավասարության ձախ մասը $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ թվերից կազմված բոլոր հնարավոր այնպիսի արտադրյալների գումար է, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է ճիշտ k արտադրիչ: Այդ գումարելիներից յուրաքանչյուր երկուսն իրարից տարբերվում են գոնե մեկ արտադրիչով: Կարելի է ապացուցել, որ k–րդ տողում եղած գումարելիների քանակը

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k!}:$$

Օրինակ, երկրորդ տողի ձախ մասում կա $\frac{n(n-1)}{2}$ գումարելի, իսկ երրորդ տողի ձախ մասում՝ $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ գումարելի:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

24. Գտնել $x^6 - 2x^5 + 4x^3 - 6x^2 + 10x - 9$ բազմանդամը $x+2$-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:

25. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n թվի դեպքում $x^n - a^n$ բազմանդամը բաժանվում է $x-a$-ի վրա:

26. Ապացուցել, որ $(x^{2k} - a^{2k}) \vdots (x+a)$, որտեղ $k \in N$:

27. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական k թվի դեպքում $x^{2k} + a^{2k}$ բազմանդամը $a \neq 0$ դեպքում չի բաժանվում ո՛չ $x-a$-ի և ո՛չ էլ՝ $x+a$-ի:

28. a-ի և b-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $3x^4 - 2x^3 + 14x^2 + ax + b$ բազմանդամը $x-2$-ի բաժանելիս տալիս է 101-ին հավասար մնացորդ, իսկ $x+1$-ի վրա՝ 0 մնացորդ:

29. Բերել 20-րդ աստիճանի այնպիսի բազմանդամի օրինակ, որը.

ա) արմատ չունենա,

բ) ունենա ճիշտ մեկ արմատ,

գ) ունենա ճիշտ երկու արմատ,

դ) ունենա ճիշտ k արմատ, որտեղ $1 \le k \le 20$:

30. Ապացուցել, որ $x=1$ թիվը $P(x)$ բազմանդամի արմատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ բազմանդամի բոլոր գործակիցների գումարը հավասար է 0-ի:

31. Կազմել 7-րդ աստիճանի $P(x)$ բազմանդամ այնպես, որ $P(k) = k$, որտեղ $k = 1, 2, \ldots, 7$:

32. n-ից ոչ բարձր աստիճանի $P(x)$ և $Q(x)$ բազմանդամների՝ x-ի միմյանցից տարբեր $n+1$ արժեքների դեպքում ընդունած համապատասխան արժեքները միմյանց հավասար են ($P(x_i) = Q(x_i)$, որտեղ $i = 1, 2, \ldots, n,\ n+1$): Ապացուցել, որ $P(x)$ և

$Q(x)$ բազմանդամները միմյանց հավասար են, այսինքն, ցանկացած $x \in R$ դեպքում $P(x) = Q(x)$:

33. Նշված թվերից ընտրել a –ի այն արժեքը, որի դեպքում ցանկացած բնական $n \geq 3$ թվի համար $x^n - ax^{n-1} + ax - 1$ բազմանդամը բաժանվի $(x-1)^2$ –ի վրա:

1) $a = 2$; 2) $a = n$; 3) $a = \dfrac{n}{n-2}$; 4) $a = \dfrac{n-2}{n}$:

34. $f(x) = x^{2n} - n^2x^{n+1} + 2(n^2 - 1)x^n - n^2x^{n-1} + 1$ բազմանդամը ցանկացած $n \geq 2$ բնական թվի դեպքում բաժանվում է ստորև նշված չորս բազմանդամներից մեկի վրա: Ո՞րն է այդ բազմանդամը:

1) $x+1$; 2) $x-n$; 3) nx; 4) $(x-1)^3$:

35. Գրել Վիետի բանաձևերը $n = 4$ դեպքում:

36. Կազմել երրորդ աստիճանի բազմանդամ, որի արմատները լինեն 2, -3 և 5 թվերը, իսկ ավագ գործակիցը՝ 4:

37. Կազմել քառակուսային այնպիսի հավասարում, որի արմատները լինեն x_1^2 և x_2^2, որտեղ x_1-ը և x_2-ը $x^2 - 5x - 1 = 0$ հավասարման արմատներն են:

38. Կազմել երրորդ աստիճանի բազմանդամ, որի արմատները լինեն $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ բազմանդամի արմատների քառակուսիները:

39. Հայտնի է, որ α, β և γ թվերը $x^3 + px^2 + qx + 1 = 0$ հավասարման արմատներն են: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ գումարն արտահայտել p -ով և q -ով:

40. Ապացուցել, որ եթե միմյանցից տարբեր a, b, c երեք թվերը բավարարում են $a^3 + pa + q = 0$, $b^3 + pb + q = 0$ և $c^3 + pc + q = 0$ պայմաններին, ապա $a + b + c = 0$:

41. Ապացուցել, որ եթե $x^3+ax^2+bx+c=0$ հավասարման արմատները կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա, ապա նրանցից մեկը հավասար է $-\dfrac{a}{3}$-ի:

42. Եթե $x^3+ax^2+bx+c=0$ հավասարման արմատները կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա, ապա նրանցից մեկը $-\sqrt[3]{c}$ թիվն է: Ապացուցել:

43. Գտնել $x^3-12x^2+mx-60=0$ հավասարման m գործակիցը, ելնելով այն պայմանից, որ այդ հավասարման արմատները մի որոշ ուղղանկյուն եռանկյան կողմերի երկարություններ են:

44. Ապացուցել, որ $a^3c=b^3$ պայմանը անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի $x^3+ax^2+bx+c=0$ հավասարման արմատները կազմեն երկրաչափական պրոգրեսիա:

45. Որոշել $x=2$ արմատի պատիկությունը
$P(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$ բազմանդամի համար:

46. $x=-3$ թիվը $x^3-x^2+ax+b=0$ հավասարման կրկնակի (երկու պատիկ) արմատն է: Գտնել a-ի և b-ի արժեքները, ինչպես նաև այդ հավասարման ևս մեկ արմատ:

47.* Տրված են նույն ավագ գործակիցներն ունեցող երրորդ աստիճանի երկու բազմանդամներ: Առաջին բազմանդամի բոլոր երեք արմատները հերթով տեղադրվել են երկրորդի մեջ և արդյունքները բազմապատկվել: Այնուհետև երկրորդ բազմանդամի բոլոր երեք արմատներն են հերթով տեղադրվել առաջինի մեջ և արդյունքները դարձյալ բազմապատկվել: Գտնել այդպես ստացված արտադրյալների գումարը:

48*. Հայտնի է, որ $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+16$ բազմանդամի a, b, c գործակիցները ոչբացասական են և այն ունի չորս արմատ: Ապացուցել, որ $P(3)\geq 625$:

4. Ամբողջ գործակիցներով բազմանդամի ռացիոնալ արմատները

Բնական հարց է ծագում. ինչպե՞ս գտնել բազմանդամի (կամ հանրահաշվական հավասարման) գոնե մեկ արմատ: Ամբողջ գործակիցներով բազմանդամների դեպքում կարելի է փնտրել ռացիոնալ, մասնավորաբար, ամբողջ արմատները, եթե, իհարկե, այդպիսիք գոյություն ունեն:

Եթե ամբողջ գործակիցներով հանրահաշվական հավասարումն ունի ռացիոնալ արմատ, ապա այն կարելի է գտնել՝ օգտվելով հետևյալ թեորեմից.

Թ ե ո ր ե մ: **Դիցուք անկրճատելի $\frac{p}{q}$ կոտորակն ամբողջ գործակիցներով n -րդ աստիճանի**

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_0 \neq 0) \qquad (1)$$

հանրահաշվական հավասարման արմատ է: Այդ դեպքում p թիվը a_0 ազատ անդամի բաժանարարն է, իսկ q -ն՝ a_n ավագ գործակցի բաժանարարը:

Ապացույց: Քանի որ $\frac{p}{q}$-ը (1) հավասարման արմատ է, ուստի ճիշտ է հետևյալ թվային հավասարությունը՝

$$a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0: \qquad (2)$$

Այս հավասարության երկու մասերը բազմապատկելով q^{n-1}-ով, այն ներկայացնենք այսպես՝

$$a_n \cdot \frac{p^n}{q} = -\left(a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \ldots + a_1 p \cdot q^{n+2} + a_0 \cdot q^{n-1}\right):$$

Թեորեմի պայմաններից և ստացված հավասարությունից պարզ երևում է, որ $a_n \cdot \frac{p^n}{q}$ թիվն ամբողջ է: Քանի որ p և q թվերը փոխադարձաբար պարզ են, ուստի p^n -ը և q -ն ևս փոխադարձաբար պարզ են: Հետևաբար, a_n -ը բաժանվում է q -ի, իսկ դա նշանակում է, որ q -ն a_n -ի բաժանարար է:

Այժմ (2) հավասարության երկու մասերը բազմապատկենք q^n -ով և այն ներկայացնենք այսպես՝

$$p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \ldots + a_1 q^{n-1}\right) = -a_0 q^n \ :$$

Ստացված հավասարության ձախ մասը բաժանվում է p -ի(քանի որ փակագծում եղած արտահայտությունն ամբողջ թիվ է): Հետևաբար, աջ մասը ևս բաժանվում է p -ի: Բայց, քանի որ q^n և p թվերը փոխադարձաբար պարզ են, ուստի $a_0 \vdots p$:

Թեորեմն ապացուցված է: Ապացուցված թեորեմից բխում են երկու կարևոր հետևանքներ.

Հ ե տ և ա ն ք 1 : **Եթե ամբողջ գործակիցներով բազմանդամն ունի ամբողջ արմատ, ապա այն ազատ անդամի բաժանարար է:**

Հ ե տ և ա ն ք 2 : **Եթե ամբողջ գործակիցներով բազմանդամի ավագ գործակիցը 1 է, ապա նրա ռացիոնալ արմատները** (եթե, իհարկե, գոյություն ունեն) **ամբողջ են:**

Բերենք օրինակներ:

Օ ր ի ն ա կ 1 : *Լուծենք հավասարումը*՝

$2x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 7x - 6 = 0$:

Լուծում: Գտնենք հավասարման ռացիոնալ արմատները: Դիցուք, $\frac{p}{q}$ անկրճատելի կոտորակն այդ հավասարման արմատ է: Ըստ թեորեմ **3**-ի՝ p թիվը պետք է փնտրել ազատ անդամի բաժանարարների, այսինքն՝ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ թվերի մեջ, իսկ q -ն՝ ավագ գործակցի դրական բաժանարարների մեջ: Այսպիսով, ռացիոնալ արմատները հարկավոր է փնտրել $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ թվերի մեջ: Ստուգումով պարզում ենք, որ -3 -ը և $\frac{1}{2}$ -ը տրված հավասարման արմատներն են: Հավասարման ձախ մասը վերածենք բազմապատկիչների: Քանի որ $x=-3$-ն արմատ է, ուստի հավասարման ձախ մասը բաժանվում է $(x+3)$-ի: Կատարելով «անկյունաձև բաժանում՝» տրված հավասարումը բերվում է հետևյալ տեսքի՝

$$(x+3)(2x^3+x^2+3x-2)=0:$$

Այժմ հարկավոր է լուծել $2x^3+x^2+3x-2=0$ հավասարումը: Մենք արդեն նկատել ենք, որ $x=\frac{1}{2}$-ն այդ հավասարման արմատ է. դա նշանակում է, որ վերջին հավասարման ձախ մասի բազմանդամը բաժանվում է $(2x-1)$-ի, այսինքն՝ $2x-1$ արտադրիչ կառաջանա, եթե $2x^3+x^2+3x-2$ բազմանդամը վերածենք բազմապատկիչների.

$$2x^3+x^2+3x-2=(2x^3-x^2)+(2x^2-x)+(4x-2)=(2x-1)(x^2+x+2):$$

Ստացված արտադրյալի երկրորդ բազմապատկիչն արմատ չունի, քանի որ այդ քառակուսային եռանդամի տարբերիչը բացասական է: Այսպիսով, տրված հավասարումն ունի ճիշտ երկու արմատ՝ -3 և $\frac{1}{2}$:

Օրինակ 2: *a-ի և b-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $x^4-ax^2+bx-12$ բազմանդամը կբաժանվի x^2-2x-3 բազմանդամի վրա:*

Լուծում: Դիցուք, $x^4-ax^2+bx-12$ բազմանդամը բաժանվում է (x^2-2x-3)-ի վրա և քանորդում ստացվում է $Q(x)$ բազմանդամ՝

$$x^4-ax^2+bx-12=(x^2-2x-3)Q(x):$$

Քանի որ այս հավասարությունը նույնություն է, ուստի այն ճիշտ հավասարություն կդառնա նաև $x=-1$ և $x=3$ արժեքներից յուրաքանչյուրի դեպքում (այդ թվերը x^2-2x-3 բազմանդամի արմատներն են): Արդյունքում կունենանք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases}1-a-b-12=0,\\ 81-9a+3b-12=0,\end{cases}$$

որտեղից կստանանք՝ $a=3,\ b=-14$:

Օրինակ 3: x *փոփոխականով բազմանդամը* $(x-2)$ *-ի և* $(x-3)$ *-ի բաժանելիս տալիս է, համապատասխանաբար, 5 և 7 մնացորդ: Գտնել այդ բազմանդամը* $(x-2)(x-3)$ *-ի վրա բաժանելիս ստացվող մնացորդը:*

Լուծում: Նկատենք, որ $P(x)$ բազմանդամը $(x-2)(x-3)$ -ի վրա բաժանելիս որոնելի մնացորդը կունենա $ax+b$ տեսքը.

$$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b : \qquad (6)$$

Մյուս կողմից, օգտվելով Բեզուի թեորեմից, խնդրի պայմանները կարող ենք ներկայացնել այսպես՝ $P(2)=5$, $P(3)=7$: Հետևաբար, (6) հավասարության մեջ հերթականությամբ տեղադրելով $x=2$ և $x=3$, կունենանք հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} 5=2a+b, \\ 7=3a+b, \end{cases}$$

որտեղից գտնում ենք՝ $a=2,\ b=1$: Հետևաբար, որոնելի մնացորդը կլինի՝ $2x+1$:

5. Հոռների սխեման

Դուք արդեն համոզվել եք, որ բազմանդամներին առնչվող շատ հարցեր քննարկելիս անհրաժեշտություն է առաջանում գտնել տվյալ P(x) բազմանդամը x – a երկանդամի բաժանելիս ստացվող քանորդը: Այն, հիմնականում, իրականացվում էր «անկյունաձև բաժանման» կանոնով կամ խմբավորման եղանակով՝ դուրս բերելով $x-a$ բազմապատկիչը: Սակայն գոյություն ունի մեկ այլ՝ ոչ բարդ մեթոդ, որի կիրառմամբ հաշվումները զգալիորեն պարզեցվում են և գործնականում ավելի արագ կարելի է գտնել քանորդ բազմանդամը:

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0, n \geq 1)$$

բազմանդամը $x-a$ երկանդամի վրա բաժանելու գործողությունը հարմար է կատարել, այսպես կոչված, ***Հոռների*** սխեմայով:

Կիրառենք անորոշ գործակիցների մեթոդը: Դիցուք, $P(x)$ -ը $(x-a)$ -ի բաժանելիս ստացվող քանորդը

$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0$$

բազմանդամն է (այն, ակնհայտորեն, $(n-1)$-րդ աստիճանի է), իսկ մնացորդը r թիվն է, այսինքն՝

$$P(x) = (x-a)Q(x) + r:$$

Տեղադրելով $P(x)$-ի և $Q(x)$-ի արժեքները՝ կստանանք հետևյալ նույնությունը՝

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = (x-a)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0) + r$$

:

Այդ հավասարության աջ մասը ներկայացնելով բազմանդամի ստանդարտ տեսքով՝ այնուհետև ձախ և աջ մասերի x-ի միևնույն աստիճանների գործակիցների հավասարություններից կունենանք՝

$$a_n = b_{n-1},\quad a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1},\quad a_{n-2} = b_{n-3} - ab_{n-2},\ \ldots,\quad a_1 = b_0 - ab_1,\quad a_0 = r - ab_0$$

որտեղից՝

$$b_{n-1} = a_n,\quad b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1},\ldots,\quad b_0 = a_1 + ab_1,\quad r = a_0 + ab_0:$$

Ստացված հավասարությունները հնարավորություն են տալիս հերթականությամբ գտնելու $Q(x)$ քանորդի գործակիցները (հետևաբար նաև՝ $Q(x)$-ը) և r մնացորդը:

Հարմարության համար ստացված արդյունքները գրառում են ստորև բերված աղյուսակի տեսքով.

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$	$b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}$	$\ldots$	$b_0 = a_1 + ab_1$	$r = a_0 + ab_0$

Այդ աղյուսակն անվանում են **Հոռների սխեմա**:

Ուշադրություն դարձրե՛ք. աղյուսակի վերին տողում հերթականությամբ նշված են $P(x)$ բազմանդամի բոլոր $n+1$ գործակիցները: Ստորին տողի ձախ կողմում գրված առաջին թիվը a-ն է, այնուհետև հերթականությամբ ստացվում են $(n-1)$-րդ աստիճանի քանորդ բազմանդամի բոլոր n գործակիցները և վերջում՝ մնացորդը: Դրանց ստացման ալգորիթմը (օրինաչափությունը) պարզ երևում է աղյուսակի տեսքից:

Քանորդի ավագ գործակիցը հավասար է բաժանելիի (P(x)–ի) ավագ գործակցին: Եթե արդեն լրացված են երկրորդ տողի որոշ վանդակներ, ապա հաջորդ դատարկ վանդակը լրացվում է այսպես. a թիվը բազմապատկում են նախորդ վանդակում եղած թվով և գումարում առաջին տողի՝ այդ վանդակի վերևում գտնվող վանդակի թիվը:

Քանի որ Բեզուի թեորեմի համաձայն $r = P(a)$, ուստի Հոռների սխեման հնարավորություն է տալիս գտնելու նաև P(x) բազմանդամի արժեքը $x = a$ կետում: Նշենք, որ շատ դեպքերում ավելի հարմար է այդ հաշվումը կատարել Հոռների սխեմայով, քան՝ P(x) բազմանդամի մեջ $x = a$ -ի անմիջական տեղադրումով:

Նշենք Հոռների սխեմայից բխող երկու օգտակար հետևանքներ:

1) Եթե $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ և a **թվերն ամբողջ են, ապա** $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ և r **թվերը ևս ամբողջ են**:

2) Եթե $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ և a **թվերը ռացիոնալ են, ապա** $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ և r **թվերը նույնպես ռացիոնալ են**:

Օրինակ 1: *Հոռների սխեմայի օգնությամբ* $5x^5 - 4x^4 + 8x^3 + x - 12$ *բազմանդամը բաժանենք* $(x - 4)$ *-ի վրա:*

Լ ու ծ ու մ: Օգտվենք Հոռների սխեմայից.

	5	-4	8	0	1	-12
4	5	16	72	288	1153	4600

Այսպիսով,

$$5x^5 - 4x^4 + 8x^3 + x - 12 = (x-4)(5x^4 + 16x^3 + 72x^2 + 288x + 1153) + 4600:$$

Ունեցանք նաև մնացորդը՝ $P(4) = 4600$:

Օ ր ի ն ա կ 2 : $x^n - 1$ *բազմանդամը բաժանենք* $(x-1)$ *-ի վրա:*

Լ ո ւ ծ ո ւ մ :

-1 հատ զրոներ

	1	0	0	0	…	0	0	-1
1	1	1	1	1	…	1	1	0

Այսպիսով,

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1):$$

Մասնավորաբար, $n = 3$ դեպքում կունենանք`

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1),$$

իսկ $n = 5$ դեպքում`

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1):$$

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

49. Բազմանդամը ներկայացնել ամբողջ գործակիցներով բազմանդամների արտադրյալի տեսքով (վերածել բազմապատկիչների).

ա) $x^3 - 5x^2 - 2x + 6$; բ) $2x^3 + 5x^2 + x - 2$;

գ) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$; դ) $x^4 + 2x^3 - 2x - 1$;

ե) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 31x - 20$; զ) $2x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 5x - 1$:

50. Գտնել հավասարման ամբողջ արմատները.

ա) $2x^3 - 7x^2 + 5 = 0$; բ) $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$;

գ) $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0$; դ) $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$:

51. Գտնել հավասարման ռացիոնալ արմատները.

ա) $x^3 + 4x^2 - 9 = 0$; բ) $4x^3 + 6x^2 - 6x + 1 = 0$;

գ) $6x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$; դ) $2x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 7x - 6 = 0$:

52. Գտնել P(x) բազմանդամի արմատները.

ա) $P(x)=3x^3-5x^2-5x+6$,

բ) $P(x)=3x^6-14x^5+11x^4+28x^3-32x^2-16x+16$:

53. Դիցուք, P-ն պարզ թիվ է: Գտնել P-ի բոլոր այն արժեքները, որոնց դեպքում $x^3-8x+P=0$ հավասարումն ունի ռացիոնալ արմատ:

54. Ապացուցել, որ $x^3-3x^2-4=4900$ հավասարումը չունի ամբողջ արմատ:

55. Օգտվելով Հոռների սխեմայից, գտնել

$$P(x)=6x^5-71x^4-90x^3-12x^2+7x-10$$

բազմանդամը ($x-13$)-ի վրա բաժանելուց ստացվող մնացորդը: Այդ մնացորդը գտեք նաև Բեզուի թեորեմի կիրառմամբ: Լուծման ո՞ր եղանակն է այս դեպքում նախընտրելի:

56.* Դիցուք, a-ն և n-ը բնական թվեր են, $n\geq 2$: Ապացուցել, որ եթե $\sqrt[n]{a}$ թիվն ամբողջ չէ, ապա այն իռացիոնալ է:

57.* $P(x)$-ն ամբողջ գործակիցներով բազմանդամ է, ընդ որում ավագ գործակիցը հավասար է **1**-ի: Հայտնի է, որ $P(0)$ և $P(1)$ թվերը կենտ են: Ապացուցել, որ $P(x)$ բազմանդամը չունի ամբողջ արմատ:

58. Ապացուցել, որ $x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+n=0$ հավասարումը, որտեղ n-ը պարզ թիվ է, ռացիոնալ արմատ չունի:

59. Գտնել $x^4-x^3+ax^2+bx+c$ բազմանդամի a, b, c գործակիցները, եթե հայտնի է, որ այն բաժանվում է x^3-2x^2-5x+6 բազմանդամի վրա:

60.* Դիցուք՝ $P(x)$-ը ամբողջ գործակիցներով բազմանդամ է և ընդունում է 5-ին հավասար արժեք x-ի՝ իրարից տարբեր հինգ ամբողջ արժեքների դեպքում: Ապացուցել, որ $P(x)$ բազմանդամը չունի ամբողջ արմատ:

61.* Գտնել $x^5-10x^4+ax^3+bx^2+cx-32$ բազմանդամի a, b, c գործակիցները, եթե հայտնի է, որ նրա բոլոր հինգ արմատները դրական են:

62.* Ապացուցել, որ եթե 7-րդ աստիճանի ամբողջ գործակիցներով $P(x)$ բազմանդամը x-ի յոթ ամբողջ արժեքների դեպքում ընդունում է 1 կամ –1 արժեք, ապա այն չի կարող ներկայացվել ամբողջ գործակիցներով երկու բազմանդամների արտադրյալի տեսքով:

§ 5. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Սույն պարագրաֆում կդիտարկվեն $A(x)=B(x)$ տեսքի այնպիսի հավասարումներ, որտեղ $A(x)$-ը և $B(x)$-ը ռացիոնալ արտահայտություններ են: Ընդունված է այդպիսի հավասարումներն անվանել **ռացիոնալ հավասարումներ:**

Ռացիոնալ հավասարումների օրինակներ են.

$$4x-5=\frac{3x-1}{x+2}, \qquad \frac{\sqrt{3}\,x-7}{x^2+1}=\frac{3}{4}x-\frac{5x-8}{2x-1}, \qquad \frac{1}{x}-\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}=0:$$

1⁰. Եթե $A(x)$-ը և $B(x)$-ը բազմանդամներ են, ապա $A(x)=B(x)$ հավասարումը կոչվում է **ռացիոնալ ամբողջ** (կամ պարզապես՝ **ամբողջ**) հավասարում:

Այդպիսի հավասարումների օրինակներ են՝

$$4x^4-3x^2+1=x^3+0{,}5x, \qquad (2x-5)\left(x+\sqrt{3}\right)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x+5,$$

$$\frac{3-2x^2}{6}-x^3=8x+\frac{x\,(x+9)}{5}:$$

Ցանկացած ամբողջ հավասարում կարելի է ձևափոխել իրեն համարժեք $P(x)=0$ տեսքի հավասարման, որտեղ $P(x)$ ը ստանդարտ տեսքի բազմանդամ է: Այդ տեսքի **հավասարման աստիճան** է կոչվում $P(x)$ բազմանդամի աստիճանը:

Նշենք, որ ռացիոնալ ամբողջ հավասարումների լուծման ընթացքում կատարվող ձևափոխությունների արդյունքում ստացվում են միայն տրվածին համարժեք հավասարումներ: Դրա շնորհիվ էլ այդպիսի հավասարումներ լուծելիս գտած արմատները չեն ստուգվում և, բացի այդ, ամեն մի կոնկրետ դեպքում այդ մասին չեն հիշատակում:

2^0. Եթե $A(x)$ և $B(x)$ ռացիոնալ արտահայտություններից գոնե մե-կը կոտորակային ռացիոնալ արտահայտություն է, ապա $A(x)=B(x)$ հավասարումը կարելի է բերել իրեն համարժեք

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \qquad (1)$$

տեսքի հավասարմանը, որտեղ $P(x)$-ը և $Q(x)$-ը ամբողջ արտահայ-տություններ են:

(1) հավասարումն անվանում են **կոտորակային ռացիոնալ** հավասա-րում: Պարզ է, որ (1) հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպ-քում, երբ $P(x)=0$ և $Q(x)\neq 0$, այսինքն, ճիշտ է հետևյալ պնդումը՝

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0 : \end{cases}$$

Այստեղից հետևում է, որ (1) հավասարումը լուծելու համար անհրաժեշտ է լուծել $P(x)=0$ հավասարումը, այնուհետև, վերջին հավասարման արմատների համար ստուգել $Q(x)\neq 0$ պայմանը (որով էլ կհայտնաբերվեն կողմնակի արմատները):

Ռացիոնալ հավասարումների լուծման հիմնական մեթոդներն են՝

1) **բազմապատկիչների վերլուծում,**
2) **նոր (օժանդակ) փոփոխականի ներմուծում:**

Բազմապատկիչների վերլուծման մեթոդի էությունը հետևյալն է: Դիցուք՝ անհրաժեշտ է լուծել $A(x)=0$ ռացիոնալ հավասարումը: Ենթադրենք՝ $A(x)$-ը ներկայացվում է x փոփոխականով ռացիոնալ արտահայտությունների արտադրյալի տեսքով՝

$$A(x)=A_1(x)A_2(x)\ldots A_n(x) :$$

Այդ դեպքում տրված հավասարումը համարժեք է

$$A_1(x)\cdot A_2(x)\cdot\ldots\cdot A_n(x)=0 \qquad (2)$$

հավասարմանը:

Թ ե ո ր ե մ : **(2) հավասարման յուրաքանչյուր արմատ**

$$A_1(x)=0; \quad A_2(x)=0; \ \ldots; \quad A_n(x)=0 \qquad (3)$$

հավասարումներից գոնե մեկի արմատ է, այսինքն՝

$$A_1(x)\cdot A_2(x)\cdot\ldots\cdot A_n(x)=0 \Rightarrow A_1(x)=0; \quad A_2(x)=0; \ \ldots; \ A_n(x)=0 :$$

Հակադարձ պնդումը ճիշտ չէ: Այսպես, օրինակ,

$$(x^2-9)\left(\frac{4}{x-3}-1\right)=0 \qquad (4)$$

հավասարման լուծումը բերվում է

$$x^2-9=0; \qquad \frac{4}{x-3}-1=0 \qquad (5)$$

հավասարումների համախմբին: (5) համախմբի արմատներն են՝ $x_1=-3;\ \ x_2=3;\ \ x_3=7$: Մինչդեռ $x=3$ դեպքում $\frac{4}{x-3}$ արտահայտությունը որոշված չէ: Հետևաբար, $x=3$-ը (4) հավասարման արմատ չէ:

Ընդհանրապես, (2) հավասարման արմատները գտնելու համար վերցնում են (3) համախմբի արմատներից այն և միայն այն թվերը, որոնք պատկանում են $A(x)$-ի ԹԱԲ-ին:

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն : Եթե $A(x)$-ը ռացիոնալ ամբողջ արտահայտություն է, ապա (2) հավասարումը և (3) հավասարումների համախումբը համարժեք է, այսինքն՝

$$A_1(x)\cdot A_2(x)\cdot\ldots\cdot A_n(x)=0 \Leftrightarrow \big(A_1(x)=0;\quad A_2(x)=0;\quad \ldots;\quad A_n(x)=0\big):$$

Օ ր ի ն ա կ 1 : *Լուծենք* $x^3-4x^2+2x-8=0$ *հավասարումը:*

Լուծում: Հավասարման ձախ մասը վերածենք բազմապատկիչների: Դրա համար բավական է կատարել այսպիսի պարզ խմբավորում՝

$$(x^3-4x^2)+(2x-8)=0:$$

Այնուհետև կունենանք՝

$$x^2(x-4)+2(x-4)=0, \qquad (x-4)(x^2+2)=0:$$

Վերջին հավասարումը համարժեք է հավասարումների հետևյալ համախմբին՝

$$x-4=0; \qquad x^2+2=0:$$

Առաջին հավասարումից ստանում ենք $x=4$: Երկրորդ հավասարումը, ակնհայտորեն, արմատ չունի: Այսպիսով, տրված հավասարումն ունի մեկ արմատ, այն է՝ 4:

Օ ր ի ն ա կ 2 : *Լուծենք* $x^3+9x^2+23x+15=0$ *հավասարումը:*

Լուծում: Հավասարման ձախ մասը գումարների զույգ-զույգ խմբավորմամբ (օրինակ 1-ի նմանությամբ) հնարավոր չէ վերածել բազմապատկիչների: Վարվենք այսպես. փորձենք այդ բազմանդամի որոշ գումարելիներ ներկայացնել այնպիսի գումարելիների տեսքով, որ խմբավորման եղանակով հնարավոր լինի այն վերածել բազմապատկիչների.

$$x^3+9x^2+23x+15=x^3+(x^2+8x^2)+(8x+15x)+15=$$

$$=(x^3+x^2)+(8x^2+8x)+(15x+15)=x^2(x+1)+8x(x+1)+15(x+1)=$$

$$=(x+1)(x^2+8x+15):$$

Հետևաբար, տրված հավասարումը համարժեք է հետևյալ հավասարմանը՝

$$(x+1)(x^2+8x+15)=0:$$

Մնում է լուծել հավասարումների հետևյալ համախումբը՝

$$x+1=0; \qquad x^2+8x+15=0:$$

Առաջին հավասարումից կստանանք՝ $x=-1$, իսկ երկրորդից՝ $x=-3;\ \ x=-5$: Այսպիսով, տրված հավասարումն ունի երեք արմատ՝ $x_1=-1,\ \ x_2=-3,\ \ x_3=-5$:

Օ ր ի ն ա կ 3 : *Լուծենք* $x^3-3x^2-13x-6=0$ *հավասարումը:*

Լուծում: Այս հավասարումը ևս կարելի է լուծել նախորդ օրինակների նմանությամբ (արտադրիչների վերլուծելու եղանակով): Ցուցաբերենք այլ մոտեցում: Ամենից առաջ փորձենք, այսպես կոչված, *հատընտրանքի* մեթոդի օգնությամբ փնտրել հավասարման ամբողջ արմատները: Օգտվենք ամբողջաթիվ արմատների գոյության անհրաժեշտ պայմանից: Նշենք ազատ անդամի բաժանարարները.

$$\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6:$$

Տեղադրությամբ համոզվում ենք, որ $x=-2$-ը տրված հավասարման արմատ է: Այժմ օգտվենք այն բանից, որ $x^3-3x^2-13x-6$ բազմանդամն առանց մնացորդի բաժանվում է $x-(-2)$-ի, այսինքն՝ $x+2$-ի: Կատարելով այդ բաժանումը, արդյունքում կունենանք՝

$$x^3-3x^2-13x-6=(x+2)(x^2-5x-3):$$

Հետևաբար, տրված հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$(x+2)(x^2-5x-3)=0:$$

Մնում է լուծել $x+2=0$; $x^2-5x-3=0$ հավասարումների համախումբը: Երկրորդ հավասարման արմատները $\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}$ և $\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$ թվերն են: Այսպիսով, տրված հավասարումն ունի երեք արմատ՝

$$x_1=-2, \qquad x_2=\frac{5-\sqrt{37}}{2}, \qquad x_3=\frac{5+\sqrt{37}}{2}:$$

Դիտողություն: Սխեմատիկ ներկայացնենք այլ եղանակ, որի միջոցով $P(x)=x^3-3x^2+x-6$ բազմանդամը, գտած՝ $x=-2$ արմատի միջոցով, առանց անկյունաձև բաժանման, վերածվում է արտադրիչների.

$$-\begin{array}{l} P(x)=x^3-3x^2-13x-6 \\ \underline{P(-2)=(-2)^3-3(-2)^2-13(-2)-6} \end{array}$$

$$P(x)-P(-2)=\left(x^3-(-2)^3\right)-3\left(x^2-(-2)^2\right)-13(x-(-2)):$$

$$P(x)-P(-2)=(x+2)(x^2-2x+4)-3(x+2)(x-2)-13(x+2)=$$

$$=(x+2)(x^2-2x+4-3x+6-13)=(x+2)(x^2-5x-3):$$

Քանի որ $P(-2)=0$, ուստի $x^3-3x^2-13x-6=(x+2)(x^2-5x-3):$,

Օրինակ 4: *Լուծենք* $9x^3-12x^2+8x-5=0$ *հավասարումը:*

Լուծում: Տրված հավասարման երկու մասերը բազմապատկենք այնպիսի թվով, որ x^3-ի գործակիցը դառնա ինչ-որ ամբողջ թվի խորանարդ: Որպես այդպիսի բազմապատկիչ կարող է լինել 3-ը: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$27x^3-36x^2+24x-15=0,$$

որը կարելի է գրել

$$(3x)^3-4\cdot(3x)^2+8\cdot 3x-15=0$$

տեսքով: $3x$-ը փոխարինելով y-ով, կստանանք՝

$$y^3-4y^2+8y-15=0:$$

Նախորդ օրինակների նմանությամբ գտնում ենք ստացված հավասարման արմատները. այն ունի միակ արմատ՝ $y=1$ (հիմնավորեք): Քանի որ $x=\frac{y}{3}$, ուստի $x=\frac{1}{3}$, որն էլ կլինի տրված հավասարման միակ արմատը:

Օ ր ի ն ա կ 5 : *Լուծենք* $8x^6+7x^3-1=0$ *հավասարումը:*

Լուծում: Կիրառենք նոր փոփոխականի ներմուծման եղանակը: Տեղադրենք՝ $y=x^3$: Այդ դեպքում տրված հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $8y^2+7y-1=0$: Լուծելով ստացված քառակուսային հավասարումը կունենանք՝ $y=-1$ կամ $y=\frac{1}{8}$: Խնդիրը հանգեցվում է $x^3=-1$; $x^3=\frac{1}{8}$ հավասարումների համախմբի լուծմանը, որտեղից կստանանք տրված հավասարման արմատները՝ $x=-1$ կամ $x=\frac{1}{2}$ *:*

Օ ր ի ն ա կ 6: Լուծենք հետևյալ հավասարումը.

$$(x^2+2x-3)^2+4x(x^2+2x-3)-12x^2=0:$$

Լուծում: Հավասարման երկու մասերը բաժանելով x^2 մեծության վրա, կստանանք համարժեք հավասարում (նախապես նկատելով, որ $x=0$ն այդ հավասարման արմատ չէ):

$$\left(\frac{x^2+2x-3}{x}\right)^2+4\cdot\frac{x^2+2x-3}{x}-12=0:$$

Ներմուծենք նոր փոփոխական՝ $\frac{x^2-x-3}{x}=y$:

Այդ դեպքում հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$y^2+4y-12=0:$$

Ստացված քառակուսային հավասարման արմատներն են՝

$$y_1=-6,\quad y_2=2:$$

Այսպիսով, տրված հավասարման լուծումը հանգում է

$$\frac{x^2+2x-3}{x}=-6; \qquad \frac{x^2+2x-3}{x}=2$$

հավասարումների համախմբի լուծմանը:

Առաջին հավասարման արմատներն են՝

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{22}}{7}, \qquad x_2=\frac{-1+\sqrt{22}}{7},$$

իսկ երկրորդ հավասարումն արմատ չունի:

Պատասխան՝ $\left\{\frac{-1-\sqrt{22}}{7}; \quad \frac{-1+\sqrt{22}}{7}\right\}$:

Դիտողություն: $x^2+2x-3=u$ և $x^2=v$ տեղադրություններով սկզբնական հավասարությունը կներկայացվի $u^2+4uv-12v^2=0$ տեսքով, որի ձախ մասն իրենից ներկայացնում է u և v փոփոխականների նկատմամբ, այսպես կոչված, երկրորդ աստիճանի **համասեռ** բազմանդամ, իսկ համապատասխան հավասարումը՝ երկրորդ աստիճանի **համասեռ հավասարում** (u և v փոփոխականներով):

u և v փոփոխականներով երրորդ աստիճանի համասեռ հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$au^3+bu^2v+cuv^2+dv^3=0,$$

իսկ չորրորդ աստիճանի համասեռ հավասարումը՝

$$au^4+bu^3v+cu^2v^2+duv^3+ev^4=0$$ տեսքը:

Նման հավասարումներն օժտված են այն առանձնահատկությամբ, որ նրա երկու մասերը բաժանելով u և v փոփոխականներից որևէ մեկի ամենամեծ ցուցիչով աստիճանի, ասենք՝ v^4 ի վրա (նախապես ստուգելով $v=0$ արժեքը), $\frac{u}{v}=y$ նշանակումով հանգեցվում է մեկ փոփոխականով հավասարմանը:

Օրինակ, $(5x^2-x-2)^3-6x^2(5x^2-x-2)^2+x^4(5x^2-x-2)+8x^6=0$ հավասարումը $5x^2-x-2=u$, $x^2=v$ նոր փոփոխականների ներմուծմամբ վերածվում է այդ փոփոխականների նկատմամբ երրորդ աստիճանի համասեռ հավասարման՝

$$u^3 - 6u^2v + cuv^2 + 8v^3 = 0:$$

Ստացված հավասարության երկու մասերը բաժանելով v^3 ի վրա՝ նկատելով, որ $v = 0$ դեպքում կստացվեր $u = 0$, որը հնարավոր չէ վերևում կատարված նշանակումների համաձայն), կունենանք՝

$$\left(\frac{u}{v}\right)^3 - 6\cdot\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \frac{u}{v} + 8 = 0:$$

Վերջինս $\frac{u}{v} = y$ նշանակումով բերվում է

$$y^3 - 6y^2 + y + 8 = 0$$

հավասարմանը: Շարունակությունը կատարեք ինքնուրույն:

Օ ր ի ն ա կ 7 : *Լուծենք հետևյալ հավասարումը:*

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0:$$

Լ ու ծ ու մ: $x + \frac{1}{x}$-ը փոխարինելով y-ով, նկատում ենք, որ

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2:$$

Այդ դեպքում տրված հավասարումը բերվում է y-ի նկատմամբ քառակուսային հավասարման՝

$$2(y^2 - 2) - 7y + 9 = 0:$$

Լուծելով այդ հավասարումը, կունենանք՝ $y_1 = 1$, $y_2 = 2{,}5$:

Դրանով իսկ հարցը հանգում է հավասարումների հետևյալ համախումբը լուծելուն՝

$$x + \frac{1}{x} = 1; \quad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}:$$

Ստացված հավասարումներից առաջինը լուծում չունի, երկրորդ հավասարումից կստանանք՝ $x = 2$; $x = \frac{1}{2}$, որոնք էլ կկազմեն տրված հավասարման արմատները:

Օ ր ի ն ա կ 9: *Լուծենք* $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4x + 4 = 0$ *հավասարումը:*

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Այս հավասարումն ունի հետաքրքիր առանձնահատկություն. նրա առաջին գործակցի և ազատ անդամի հարաբերությունը հավասար է երկրորդ գործակցի ու նախավերջին գործակցի հարաբերության քառակուսուն: Այդ առանձնահատկությամբ օժտված հավասարումն անվանում են **անդրադարձ**: Այդ օրինակի վրա ցույց տանք, թե ինչպես կարելի է լուծել չորրորդ աստիճանի անդրադարձ հավասարումը: Հավասարման երկու մասերը բաժանելով x^2-ու վրա, կստանանք նրան համարժեք հավասարում (քանի որ $x = 0$ արժեքը տրված հավասարման համար արմատ չէ).

$$x^2 + 2x - 7 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} = 0,$$

և, այնուհետև՝

$$\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + 2\left(x - \frac{2}{x}\right) - 7 = 0: \qquad (6)$$

Դիցուք, $x - \frac{2}{x} = y$, այդ դեպքում $\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 = y^2$, որտեղից՝

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 + 4:$$

(6) հավասարման մեջ $\left(x - \frac{2}{x}\right)$-ը փոխարինելով y-ով, իսկ $\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right)$-ն՝ $y^2 + 4$-ով, կունենանք՝ $y^2 + 2y - 3 = 0$:

Ստացված քառակուսային հավասարման արմատներն են՝ $y_1 = 1$; $y_2 = -3$: Անդրադառնալով նշանակմանը, կունենանք

$x-\frac{2}{x}=1$; $x-\frac{2}{x}=-3$ հավասարումների համախումբը: Համախմբի առաջին հավասարման արմատներն են՝ $-1;2$, իսկ երկրորդ հավասարման արմատները՝ $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$:

Այսպիսով, տրված հավասարման արմատներն են՝

$$x_1=-1; \qquad x_2=2; \qquad x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}:$$

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն : Չորրորդ աստիճանի անդրադարձ հավասարման ընդհանուր տեսքն է՝ $ax^4+bx^3+cx^2+kbx+k^2a=0$ (մասնավորաբար, $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$), որը $y=x+\frac{k}{x}$ $\left(y=x+\frac{1}{x}\right)$ նոր փոփոխականի ներմուծմամբ հանգեցվում է քառակուսային հավասարման:

Օ ր ի ն ա կ 1 0 : *Լուծենք* $x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=27$ *հավասարումը:*

Լ ո ւ ծ ո ւ մ : Հավասարման ձախ մասն իրենից ներկայացնում է արտահայտությունների քառակուսիների գումար: Դրանից անջատենք գումարի կամ տարբերության քառակուսի՝ օգտվելով

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ կամ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ բանաձևից:

Մի դեպքում կունենանք՝

$$\left(x+\frac{3x}{x+3}\right)^2-2x\frac{3x}{x+3}=27, \quad \text{այսինքն՝} \quad \left(\frac{x^2+6x}{x+3}\right)^2-\frac{6x^2}{x+3}=27,$$

Մյուս դեպքում՝

$$\left(x-\frac{3x}{x+3}\right)^2+2x\frac{3x}{x+3}=27, \quad \text{այսինքն՝} \quad \left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2+\frac{6x^2}{x+3}=27:$$

Հասկանալի է, որ տրված առաջադրանքի համար նպատակահարմար է կիրառել երկրորդ ձևափոխությունը: Կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝ $\frac{x^2}{x+3}=y$, կունենանք՝

$$y^2+6y-27=0, \quad \text{որտեղից`} \quad y=-9;\ y=3:$$

Խնդիրը հանգեցվում է

$$\frac{x^2}{x+3}=-9; \qquad \frac{x^2}{x+3}=3$$

հավասարումների համախմբի լուծմանը: Առաջին հավասարումն արմատ չունի, երկրորդից գտնում ենք` $x=\frac{3}{2}\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$: Վերջին երկու թվերը (և միայն դրանք) տրված հավասարման արմատներն են:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

Լուծել հավասարումը (1-26).

1. $x^3-8x=0$:

2. $x^5+8x^2=0$:

3. $x^3+4x^2-2x-8=0$:

4. $x^3-3x^2+4x-12=0$:

5. $x^3+x-2=0$:

6. $x^3-7x-6=0$:

7. $x^3+7x^2+4x-2=0$:

8. $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$:

9. $x^4+5x^3+4x^2-24x-24=0$:

10. $2x^4-7x^3+9x^2-7x+2=0$:

11. $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$;

12. $6x^4+5x^3-38x^2-10x+24=0$:

13. $x^5-4x^4+4x^3-x^2+4x-4=0$;

14. $x^5+4x^4-6x^3-24x^2-27x-108=0$:

15. $\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+11}{x+10}=\frac{2x-5}{2x-7}-\frac{x-1}{x-2}$:

16. $\frac{2y+1}{y-1}+\frac{y+1}{2y+1}=\frac{5y+4}{(y-1)(2y+1)}$:

17. $\frac{2x+1}{x^3+8}+\frac{2x}{x^2-2x+4}=\frac{3}{x+2}$:

18. $\frac{x+5}{x^2-6x+8}+\frac{1}{x^2-7x+10}=\frac{1}{x-2}$:

19. $\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-8}$;

20. $\frac{2x+9}{x+3}-\frac{x+8}{x+4}=\frac{2x+15}{x+5}-\frac{x+12}{x+6}$:

21. $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$:

22. $\frac{4(x+3)}{2x^3+x^2-8x-4}-\frac{5}{2x^2-3x-2}=1$:

23. $x^8-15x^4-16=0$:

24. $x^9+x^6-2=0$:

25. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9$:

26. $\frac{3}{1+x+x^2}=3-x-x^2$:

Լուծել հավասարումը՝ նոր փոփոխականի ներմուծման եղանակով (27-30).

27. $\dfrac{1}{x^2-2x+2}+\dfrac{2}{x^2-2x+3}=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$:

28. $\dfrac{16}{(x+6)(x-1)}-\dfrac{20}{(x+2)(x+3)}=1$:

29. $x(x-1)(x-2)(x-3)=120$:

30. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$:

Լուծել հավասարումը (31-44).

31. $4x^3+6x^2+4x+1=0$:

32. $10x^3-3x^2-2x+1=0$:

33. $6x^3-13x^2+9x-2=0$:

34. $4x^3+6x^2+5x+69=0$:

35. $(x+3)^4+(x+5)^4=16;$

36. $(x-2)^4+(x-4)^4=5$:

37. $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+9=0$:

38. $4x^2+12x+\dfrac{12}{x}+\dfrac{4}{x^2}=47$:

39. $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$:

40. $16x^4+8x^3-7x^2+2x+1=0$:

41. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=5\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{4}{x}\right)$:

42. $\dfrac{x^2-6x-9}{x}=\dfrac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}$:

43. $(x+5)^4-13x^2(x+5)^2+36x^4=0;$

44. $(x^2-x+1)^3+2x^4(x^2-x+1)-3x^6=0$:

45. Գտնել հավասարման ամենամեծ արմատը.

$$\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{8x^3-4x^2+2x-6}=\frac{6x}{3+2x+4x^2}\ :$$

46. Գտնել հավասարման ամենափոքր արմատը.

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)}+\frac{7}{(x+5)(x-4)}=-0{,}25\ :$$

§ 6. ԱՄԲՈՂՋ ԵՎ ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ՄԱՍԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

Հիշենք «**թվի ամբողջ մաս**» և «**թվի կոտորակային մաս**» հասկացությունների սահմանումները:

Ս ա հ մ ա ն ու մ 1. a թվի **ամբողջ մաս է** կոչվում a թիվը չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվը:

Ընդունված է այն նշանակել $[a]$ պայմանանշանով (կարդում են «ամբողջ մաս a»): Սահմանումից հտևում է, որ բոլոր այն x իրական թվերի բազմությունը, որոնց ամբողջ մասը տրված k ամբողջ թիվն է, որոշվում է հետևյալ առնչությամբ՝

$$[x]=k \Leftrightarrow k \le x < k+1:$$

Ճիշտ են հետևյալ պնդումները.

1. **Ցանկացած a և b իրական թվերի համար**

$$[a]+[b] \le [a+b]:$$

2. **Ցանկացած a իրական թվի և k ամբողջ թվի դեպքում**

$$[a+k]=[a]+k:$$

Սահմանումից հետևում է նաև, որ $f(x)=[x]$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը R-ն է (իրական թվերի բազմությունը), իսկ արժեքների տիրույթը՝ ամբողջ թվերի Z բազմությունը:

Ս ա հ մ ա ն ու մ 2. a թվի **կոտորակային մաս** են անվանում a թվի և նրա ամբողջ մասի տարբերությունը:

a թվի կոտորակային մասը նշանակվում է հետևյալ պայմանանշանով՝ $\{a\}$ և կարդացվում է՝ «կոտորակային մաս a»: Ըստ սահմանման՝

$$\{a\}=a-[a]:$$

Կոտորակային մասի սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ ցանկացած a իրական թվի համար

$$0 \le \{a\} < 1:$$

$y=\{x\}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը իրական թվերի R բազմությունն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ $[0;1)$ միջակայքը:

Ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները՝

1) Ցանկացած a իրական թվի և k ամբողջ թվի դեպքում

$$\{a+k\}=\{x\}:$$

2) Ցանկացած a և b իրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\{a\}+\{b\}\geq\{a+b\}:$$

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

Լուծել հավասարումները (1-22).

1. $[5x-1]=9:$

2. $[2x+5]=-3:$

3. $[0,5x-4]=0:$

4. $[2x+4,5]=10,5:$

5. $\{x\}=0,5:$

6. $\{0,2x+0,6\}=0,8:$

7. $\{7x-9\}=1$

8. $\{\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\}=0:$

9. $[x+5]+[x-7]=12:$

10. $[x+4]-[x-9]+[3x+13]=35:$

11. $[x^2]=100:$

12. $[x]^2=10:$

13. $4[x]^2-9[x]+2=0:$

14. $\{x^2+8\}=\{6x-1\}:$

15. $[2x-5]=[x]:$

16. $\left[\frac{2x-15}{3}\right]=\frac{x}{2}:$

17. $\{x\}=\frac{x+4}{5}:$

18. $[2x]+\{x\}=1:$

19. $3\{x\}+2[x]=5:$

20. $[x]=\sqrt{9-x^2}:$

21. $2\{x\}+\left[x+\frac{1}{3}\right]=5:$

22. $[x](x^2+x+1)=4:$

Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը (23-31).

23. $y=[x]:$

24. $y=\{x\}:$

25. $y=2[x]:$

26. $y=\{x\}+2:$

27. $y=[|x|]$:

28. $y=[x]^2$:

29. $y=\{x\}^2$:

30. $y=\dfrac{1}{[x]}$:

31. $y=\dfrac{1}{\{x\}}$:

32. Ի՞նչ կարելի է ասել x և y թվերի մասին, եթե.

ա) $[x+y]=y$, բ) $\{x+y\}=y$:

33. Ի՞նչ կարելի է ասել $x-y$ մեծության մասին, եթե.

ա) $[x]=[y]$, բ) $\{x\}=\{y\}$:

34. Օգտվելով գրաֆիկական եղանակից՝ գտնել հավասարման արմատների քանակը.

ա) $[x]=0,99x$, բ) $\{x\}=\dfrac{x}{2017}$:

Լուծել անհավասարումը (35-40).

35. ա) $[x]\le 3$, բ) $[x]>8$:

36. ա) $\{x\}\le 0,7$, բ) $\{x\}>\dfrac{1}{4}$:

37. ա) $\sqrt{[x]}\le 5$, բ) $\sqrt{\{x\}}>\dfrac{1}{2}$:

38. ա) $\{x\}>[x]$, բ) $[x]\ge\{x\}$:

39. ա) $[\cos x]>0$, բ) $[\sin x]<0$:

40. ա) $[x]\ge[2x]$, բ) $\{x\}>\{2x\}$:

Գտնել թվային արտահայտության ամբողջ մասը (41-47).

41. $\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots+\sqrt{20+\sqrt{20}}}}+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\ldots+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24}}}}$:

42. $\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots+\sqrt{20+\sqrt{20}}}}+\sqrt[4]{78+\sqrt[4]{78+\ldots+\sqrt[4]{78+\sqrt[4]{78}}}}$:

43. $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+[\sqrt{4}]+\ldots+[\sqrt{29}]+[\sqrt{30}]$:

44. $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1000}}+\frac{1}{\sqrt{1000}+\sqrt{1001}}$:

45*. $\left(\sqrt{17}+\sqrt{18}+\sqrt{19}\right)^2$:

46*. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{999999}}+\frac{1}{\sqrt{1000000}}$:

47*. $\sqrt{2}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+\ldots+\sqrt[2017]{\frac{2017}{2016}}$:

Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n թվի դեպքում հավասարությունը ճիշտ է (48-50).

48. $\left[\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\frac{2}{n+3}+\ldots+\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n}\right]=1$:

49. $\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}\right]=1$:

50*. $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$:

51*. Ապացուցել, որ ցանկացած $n\geq 5$ բնական թվի դեպքում $n!$ թիվը՝ տասնորդական գրառմամբ, վերջանում է զրոներով, ընդ որում, այդ զրոների m քանակը կարելի է գտնել հետևյալ բանաձևով՝

$$m=\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[\frac{n}{5^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{5^k}\right],$$

որտեղ k-ն այնպիսի բնական թիվ է, որ $5^k\leq n<5^{k+1}$:

52*. Դիցուք, m և n թվերը փոխադարձաբար պարզ ցանկացած բնական թվեր են: Ապացուցել, որ

$$\left\{\frac{m}{n}\right\}+\left\{\frac{2m}{n}\right\}+\left\{\frac{3m}{n}\right\}+\ldots+\left\{\frac{(n-2)m}{n}\right\}+\left\{\frac{(n-1)m}{n}\right\}$$

գումարը կախված չէ m-ից: Ինչի՞ է հավասար այն:

53. Ապացուցել, որ ցանկացած x-ի դեպքում ճիշտ է

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]+[x]=[2x]$$

հավասարությունը:

54*. Ապացուցել, որ ցանկացած $x\in R$ և $n\in N$ թվերի համար ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]:$$

§ 7. ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Նախնական պարզաբանումներ

Էքստրեմումային են կոչվում այն խնդիրները, որոնցում պահանջվում է որոշել, թե ինչ ամենամեծ կամ ամենափոքր արժեք կարող է ընդունել այս կամ այն մեծությունը: Երկրաչափական բնույթի այդպիսի խնդիրների լուծման համար կարելի է առանձնացնել երկու մոտեցում՝ երկրաչափական և անալիտիկ:

Երկրաչափական էքստրեմումային խնդիրները սերտ կապված են և՛ հանրահաշվական, և՛ երկրաչափական հայտնի անհավասարությունների հետ, քանի որ այդպիսի խնդիրներ լուծելիս հարկ կլինի ի հայտ բերել երկրաչափական մեծությունների միջև որևէ առնչություն և գնահատել փոփոխական պարունակող ստացված արտահայտությունը՝ կիրառելով հայտնի անհավասարություններ: Այստեղ կարևոր է բացահայտել, թե տվյալ անհավասարության մեջ ո՞ր դեպքում տեղի ունի հավասարության նշան:

Նախապես վերհիշենք առավել գործածվող հանրահաշվական հայտնի անհավասարությունները:

Ցանկացած ոչ բացասական a **և** b **թվերի համար ճիշտ են հետևյալ անհավասարությունները** (1-3).

1) $a^2+b^2 \geq 2ab$:   2) $ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$:   3) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$:

Վերոհիշյալ անհավասարություններից յուրաքանչյուրում հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b$:

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն: 1-3 անհավասարությունները ճիշտ են a-ի և b-ի ցանկացած իրական արժեքների դեպքում: Քանի որ երկրաչափական մեծությունների թվային արժեք-ները չեն կարող բացասական լինել, ուստի, այդ առումով էլ շեշտը դրվում է ոչ բացասական a և b թվերի վրա:

4) Ցանկացած դրական a -ի դեպքում ճիշտ է

$$a+\frac{1}{a}\geq 2$$

անհավասարությունը: Հավասարության դեպք տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=1$:

5) Թվաբանական և երկրաչափական միջինների կապը:
Ցանկացած a և b դրական թվերի համար ճ ի շ տ է

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

անհավասարությունը: Հավասարության դեպք տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b$:

Ընդհանրապես, ցանկացած դրական $a_1, a_2, ..., a_n$ թվերի համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը (Կոշիի անհավասարություն),

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt{a_1a_2...a_n}$$

Այստեղ հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_1=a_2=...=a_n$:

Մասնավորաբար, երեք թվերի համար ունենք`

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\ :$$

Ելնելով բնական թվերի n միջինների կապից (Կոշիի անհավասարությունից) ձևակերպենք երկու կարևոր թեորեմներ (հետևանքներ), որոնք կարող են օգտակար լինել մեծագույնի և փոքրագույնի վերաբերյալ շատ խնդիրներ լուծելիս:

Թեորեմ 1: **Եթե դրական n փոփոխականների գումարը հաստատուն է, ապա այդ փոփոխականների արտադրյալը կունենա մեծագույն արժեք այն և միայն այն դեպքում, երբ բոլոր n գումարելիները միմյանց հավասար են:**

Այլ կերպ ասած, եթե $x_1+x_2+...+x_n=c$ (հաստատուն), ընդ որում $x_i>0$, ($i=1, 2, ..., n$) ապա $x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n$ արտադրյալը կընդունի մեծագույն արժեք այն և միայն այն դեպքում, երբ $x_1=x_2=...=x_n=\dfrac{c}{n}$: Այդ մեծագույն արժեքը հավասար է $\left(\dfrac{c}{n}\right)^n$:

Թեորեմ 2: **Եթե դրական n փոփոխականների արտադրյալը հաստատուն է, ապա նրանց գումարը կընդունի փոքրագույն արժեք այն և միայն այն դեպքում, երբ բոլոր n արտադրիչները միմյանց հավասար են:**

Այլ կերպ ասած, եթե $x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n=P$ (հաստատուն), ընդ որում $x_i>0$ ($i=1, 2, ..., n$), ապա $x_1+x_2+...+x_n$ գումարը կընդունի փոքրագույն արժեք այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$x_1=x_2=...=x_n=\sqrt[n]{p}$$

Այդ փոքրագույն արժեքը հավասար է $n\sqrt[n]{p}$:

6) **Եթե** $a>0$, **ապա** x **փոփոխականի ցանկացած արժեքի դեպքում** $f(x)=ax^2+bx+c$ **քառակուսային ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմանին՝**

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}\geq-\frac{D}{4a},\ \text{որտեղ}\ D=b^2-4ac:$$

Հետևանք: Եթե $a>0$, ապա

$$\max\left(ax^2+bx+c\right)=-\frac{D}{4a},\ \text{երբ}\ x=\frac{b}{2a}:$$

7) **Եթե** $a<0$, **ապա** x **փոփոխականի ցանկացած արժեքի դեպքում**

$$ax^2+bx+c\leq-\frac{D}{4a}:$$

Հետևանք: Եթե $a<0$, ապա

$$\max\left(ax^2+bx+c\right)=-\frac{D}{4a},\text{ երբ } x=\frac{b}{2a}:$$

Եթե f ֆունկցիան X միջակայքի ցանկացած x_1 և x_2 թվերի համար բավարարում է

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\qquad\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$$

անհավասարությանը, ապա այդ միջակայքի ցանկացած x_1, x_2, ..., x_n թվերի համար ճիշտ է նաև հետևյալ անհավասարությունը՝

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}$$

(համապատասխանաբար

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}\text{)}$$

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. $AB=12$ սմ երկարություն ունեցող հատվածը բաժանել երկու մասի այնպես, որ նրանցից մեծի վրա կառուցված կանոնավոր եռանկյան և մյուսի վրա կառուցված քառակուսու մակերեսների գումարը լինի ամենափոքրը:

2. Ուղղանկյան պարագիծը 24 սմ է: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն ուղղանկյան չափսերը, որպեսզի դրա մակերեսը լինի ամենամեծը:

3. 16 սմ² մակերես ունեցող բոլոր ուղղանկյուններից գտնել այն, որի պարագիծը ամենափոքրն է:

4. Ինչպիսի՞ն պետք է լինի c ներքնաձիգով ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունը, որպեսզի դրա մակերեսը լինի մեծագույնը:

5. Ինչպիսի՞ն պետք է լինի c ներքնաձիգով ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունը, որպեսզի դրա պարագիծը լինի մեծագույնը:

6. Ինչպիսի՞ն պետք է լինի c ներքնաձիգով ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունը, որպեսզի դրան ներգծած շրջանագծի շառավիղը լինի մեծագույնը:

7. Ներքնաձիգին տարված h բարձրությունն ունեցող բոլոր ուղղանկյուն եռանկյուններից գտնել այն, որն ունենա ամենափոքր պարագիծը:

8. Տրված ներքնաձիգն ունեցող բոլոր ուղղանկյուն եռանկյուններից գտնել այն, որի ուղիղ անկյան կիսորդն ամենամեծն է:

9. Ուղիղ անկյան տրված կիսորդն ունեցող բոլոր ուղղանկյուն եռանկյուններից գտնել այն, որի ներքնաձիգը ամենափոքրն է:

10. c ներքնաձիգ և 60° անկյուն ունեցող ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած է ուղղանկյուն, որի մի կողմը գտնվում է ներքնաձիգի վրա: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն ուղղանկյան կողմերի երկարությունները, որպեսզի նրա մակերեսը լինի ամենամեծը:

11. Հավասարասրուն եռանկյան պարագիծը հավասար է 6 սմ է: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի այդ եռանկյան հիմքը, որպեսզի դրա մակերեսը լինի ամենամեծը:

12. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքի և դրան տարած բարձրության երկարությունների գումարը 20 սմ է: Եռանկյան բարձրության ի՞նչ արժեքի դեպքում նրա մակերեսը կլինի ամենամեծը: Գտնել այդ մակերեսը:

13. Եռանկյան երկու կողմերի գումարը հավասար է a-ի, իսկ նրանցով կազմված անկյունը φ: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն այդ կողմերը, որպեսզի եռանկյան մակերեսը լինի ամենամեծը:

14. Հավասարասրուն եռանկյան մակերեսը հավասար է P-ի: Եռանկյան հիմքի ի՞նչ արժեքի դեպքում դրան արտագծած շրջանագծի շառավիղը կլինի փոքրագույնը:

15. Տրված ABC եռանկյան AB հիմքի վրա տրված է M կետը: Նրանից ի՞նչ հեռավորության վրա պետք է տանել հիմքին զուգահեռ DE ուղիղը, որպեսզի MDE եռանկյան մակերեսը լինի ամենամեծը ($D \in AC$, $E \in BC$):

16. ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ $AC = AB = 10$ սմ, $BC = 12$ սմ: Պահանջվում է այդ եռանկյունուց կտրել ամենամեծ մակերեսով զուգահեռագիծ այնպես, որ դրա անկյուններից մեկը համընկնի հիմքին առընթեր անկյան հետ: Գտնել որոնելի զուգահեռագծի կողմերի երկարությունները:

17. a հիմք h_a բարձրություն ունեցող եռանկյանը ներգծված է ուղղանկյուն այնպես, որ մի կողմը ընկած է հիմքի վրա: Այդ ուղղանկյուններից գտնել այն, որի մակերեսը ամենամեծն է:

18. Տրված ABC եռանկյան BC հիմքի վրա գտնել այն կետը, որից մինչև մյուս կողմերը եղած հեռավորությունների արտադրյալն ամենամեծն է:

19. Զուգահեռագծի բոլոր կողմերի երկարությունների գումարը հավասար է $2P$-ի: Գտնել դրա անկյունագծերի քառակուսիների գումարի փոքրագույն արժեքը:

20. Զուգահեռագծի անկյունների երկարությունների գումարը հավասար է 12 սմ: Գտնել դրա բոլոր կողմերի քառակուսիների գումարի ամենափոքր արժեքը:

21. Շեղանկյան անկյունագծերի գումարը հավասար է 24 սմ: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն շեղանկյան անկյունագծերի երկարությունները, որպեսզի դրա մակերեսը լինի ամենամեծը:

22. Պատուհանի վերին մասն ունի կանոնավոր եռանկյան տեսք, իսկ ներքևի մասը ուղղանկյունաձև է, որի լայնությունը կանոննավոր եռանկյան կողմն է: Պատուհանի պարագիծը a է: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն պատուհանի ուղղանկյունաձև մասի չափսերը, որպեսզի պատուհանի մակերեսը լինի ամենամեծը:

23. Պատուհանի վերին մասն ունի կիսաշրջանի տեսք, իսկ ներքևի մասն ուղղանկյուն է, որի լայնությունը կիսաշրջանի տրամագիծն է: Պատուհանի պարագիծը հավասար է a-ի: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն պատուհանի ուղղանկյան մասի չափսերը, որպեսզի սենյակն ունենա առավելագույն լուսավորվածություն:

24. Ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, և դրանց երկարությունների գումարը հավասար է 12 սմ-ի: Ինչպիսի՞ ամենամեծ մակերես կարող է ունենալ այդ քառանկյունը:

25. Ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերի գումարը հավասար է a-ի, իսկ դրանց կազմած անկյունը α: Ի՞նչ ամենամեծ արժեք կարող է ունենալ այդպիսի քառանկյան մակերես:

26. Շրջանագծի վրա տրված է A կետը: A կետում շրջանագծի շոշափողին զուգահեռ ի՞նչ հեռավորության վրա պետք է տանել BC լարը, որպեսզի ABC եռանկյան մակերեսը լինի ամենամեծը:

27. Հավասարասրուն սեղանի մեծ հիմքի և բարձրության գումարը հավասար է 8 սմ, իսկ հիմքին առընթեր սուր անկյունը՝ 45°: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի սեղանի մեծ հիմքը, որպեսզի սեղանի մակերեսը լինի ամենամեծը:

28. Հավասարասրուն սեղանի մեծ հիմքը 1 սմ է, իսկ նրան առընթեր անկյունը՝ α: Սեղանի անկյունագիծն ուղղահայաց է սրունքին: α-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում սեղանի մակերեսը կլինի ամենամեծը: Գտնել այդ ամենամեծ մակերեսը:

29. Ուղիղ անկյան ներգծած 1 շառավղով շրջանագծին տարված է շոշափող, որը հատում է ուղիղ անկյան գագաթը շրջանագծի կենտրոնին միացնող հատվածը: Շոշափողն ուղիղ անկյունից անջատում է մեծագույն մակերես ունեցող եռանկյուն: Շոշափողը անկյան կողմերից ի՞նչ երկարության հատվածներ է անջատում:

30. A և B կետերը պատկանում են տրված շրջանագծին: Այդ շրջանագծի վրա գտնել C կետն այնպես, որ $AC \cdot CB$ արտադրյալը լինի ամենամեծը:

31. R շառավղով կիսաշրջանագծին ներգծած է սեղան, որի հիմքը կիսաշրջանագծի տրամագիծն է: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն սեղանի մյուս կողմերի երկարությունները, որպեսզի այդ սեղանի պարագիծի լինի ամենամեծը:

32. R շառավղով կիսաշրջանագծին ներգծած է սեղան, որի հիմքը կիսաշրջանագծի տրամագիծն է: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն սեղանի սրունքը, որպեսզի սեղանի մակերեսը լինի ամենամեծը:

33. Բոլոր շրջանային սեկտորներից, որոնք ունեն տրված P պարագիծը, գտնել այն, որն ունի ամենամեծ մակերեսը: Ինչպիսի՞ն է նրա շառավիղը:

34. R շառավղով շրջանագծին ներգծված է α մեծությամբ անկյուն: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն այդ անկյունը կազմող լարերի երկարությունները, որպեսզի դրանց գումարը լինի ամենամեծը:

35. Տրված $M(3;4)$ կետով տանել կոորդինատների սկզբնակետով չանցնող ուղիղ, որը կոորդինատների դրական կիսառանցքներից հատի այնպիսի հատվածներ, որոնց գումարը լինի ամենափոքրը:

36. Տրված $M(5;7)$ կետով տանել կոորդինատների սկզբնակետով չանցնող ուղիղ, որը կոորդինատների դրական կիսառանցքներից հատի այնպիսի հատվածներ, որոնց արտադրյալը լինի ամենափոքրը:

37. A, B, C - ն հարթության տրված կետեր են: Այդ հարթության ո՞ր M կետի համար $3 \cdot AM + 2 \cdot BM + CM$ գումարը կլինի ամենափոքրը:

38. ABC սուրանկյուն եռանկյան AB կողմի վրա վերցրած M կետից AC և BC կողմերին տարված են համապատասխանաբար MP և MQ ուղղահայացներ: M կետի ի՞նչ դիրքի դեպքում PQ հատվածի երկարությունը կլինի ամենափոքրը:

39. O գագաթով ուղիղ անկյան կողմերից մեկի վրա վերցված են A և B կետերն այնպես, որ $OA = 1$, $OB = 3$: Ինչի՞ է հավասար AMB անկյան ամենամեծ արժեքը, որտեղ M -ն անկյան մյուս կողմի կետ է:

40. Ինչի՞ է հավասար MN -ի ամենամեծ արժեքը, եթե M -ը 3 և 4 էջերով ուղղանկյուն եռանկյան եզրագծի կետն է, իսկ N -ը այդ եռանկյան ներգծած շրջանագծի կետը:

41. Տրված է O գագաթով 60° անկյուն: Դրա կողմերից մեկի վրա վերցված են A և B կետերն այնպես, որ $OA = 5$, $OB = 2$: Դիցուք՝ M -ն անկյան մյուս կողմի կետ է՝ իսկ N -ը այնպիսի կետ է, որ $\angle ANB = 60^0$: Ինչի՞ է հավասար MN հատվածի երկարության ամենափոքր արժեքը:

42. Գտնել այն ամենամեծ շրջանի շառավիղը, որը կարելի է ծածկել R շառավիղ ունեցող երեք շրջաններով: Լուծել խնդիրն ընդհանուր դեպքում՝ երբ շրջանագծերի շառավիղները հավասար են R_1, R_2, R_3:

43. Տրված AOB սուր անկյան ներսում տրված է M կետը: OA և OB կողմերի վրա գտնել այնպիսի X և Y կետեր, որ XYM եռանկյան պարագիծը լինի փոքրագույնը:

44. Տրված է AOB անկյունը և նրա ներսում M կետը: M կետով տանել անկյան կողմերը հատող այնպիսի ուղիղ, որ անկյունից անջատի ամենափոքր մակերեսով եռանկյուն:

45. O կենտրոնով շրջանի ներսում տրված է A կետը: Այդ շրջանագծի վրա գտնել այնպիսի M կետ, որի համար OMA անկյունը մեծագույնն է:

46. Տրված է ABC եռանկյունը: AB կողմի վրա գտնել այնպիսի M կետ, որի համար ACM և BCM եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերի շառավիղների գումարը լինի ամենափոքրը:

47. Տրված ABC եռանկյան ներսում վերցված է O կետը: Դիցուք՝ d_a, d_b, d_c-ն այդ կետի հեռավորություններն են BC, CA և AB ուղիղներից: O կետի ի՞նչ դիրքի դեպքում $d_a \cdot d_b \cdot d_c$ արտադրյալը կլինի ամենամեծը:

48*. Տրված է ABC սուրանկյուն եռանկյուն: Այդ եռանկյան ներսում գտնել այնպիսի Q կետ, որ QA, QB, QC հատվածների երկարությունների գումարը լինի ամենափոքրը:

49*. Տրված շրջանագծին ներգծած բոլոր եռանկյուններից գտնել այն, որի կողմերի երկարությունների քառակուսիների գումարը մեծագույնն է:

50*. Տրված շրջանագծին ներգծած բոլոր բազմանկյուններից գտնել այն, որի կողմերի երկարությունների քառակուսիների գումարը մեծագույնն է:

51. Ուռուցիկ քառանկյան ներսում գտնել կետ , որից քառանկյան գագաթներն ունեցած հեռավորությունների գումարը փոքրագույնն է:

52. Ուռուցիկ $ABCD$ քառանկյան անկյունագծերը հատվում են O կետում: Ինչպիսի՞ ամենափոքր մակերես կարող է ունենալ այդ քառանկյունը, եթե OAB եռանկյան մակերեսը 4 է, իսկ COD եռանկյան մակերեսը՝ 9:

53. Տրված $ABCD$ ուղղանկյան BC կողմի վրա վերցված է այնպիսի K կետ, որ $BK = 4 \cdot KC$, իսկ CD կողմի վրա M կետն այնպես, որ $CM = 4 \cdot MD$: $AB : BC$ հարաբե-րության ի՞նչ արժեքի դեպքում KAM անկյան մեծությունը կլինի ամենամեծը:

54. $ABCD$ սեղանի AD հիմքի վրա տրված է K կետը: BC հիմքի վրա գտնել այնպիսի M կետ, որի համար AMD և BKC եռանկյունների ընդհանուր մասի մակերեսը լինի մեծագույնը:

55. Ապացուցել, որ տրված BC կողմով և այդ կողմի հանդիպակաց հաստատուն α մեծու-թյամբ անկյունով բոլոր եռանկյուններից.

ա) ամենամեծ մակերեսն ունի BC հիմքով հավասարասրուն եռանկյունը.

բ) ամենամեծ պարագիծն ունի BC հիմքով հավասարասրուն եռանկյունը:

56*. ABC_1 և ABC_2 եռանկյուններն ունեն ընդհանուր AB կողմ և $\angle AC_1B = \angle AC_2B$: Ապացուցել, որ եթե

$$\left|AC_1 - C_1B\right| < \left|AC_2 - C_2B\right|,$$ ապա.

ա) ABC_1 եռանկյան մակերեսը մեծ է ABC_2 եռանկյան մակերեսից;

բ) ABC_1 եռանկյան պարագիծը մեծ է ABC_2 եռանկյան պարագծից:

57*. Ապացուցել, որ տրված շրջանագծին ներգծած բոլոր n-անկյուն բազմանկյուններից ամենամեծ մակերեսն ունի կանոնավոր n-անկյունը:

58*. Ապացուցել, որ տրված շրջանագծին ներգծած բոլոր n-անկյուն բազմանկյուններից ամենամեծ պարագիծն ունի կանոնավոր n-անկյունը:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

§ 1. Բազմություն: Ենթաբազմություն Գործողությունների բազմությունների հետ

12. ա) 32, բ) 128: **13.** *Ց ու ց ու մ*: Կիրառել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը: **15.** $\{12m-1,\ m\in Z\}$: **16.** $\left\{\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z\right\}$: **17.** 2: **18.** 19:

19. 4: **20.** 11: **22.** Հավասար են: **23.** 68: **24.** Փիլիսոփաները: **25.** 10 %:
26. 22: **27.** ա) $n+m-k$, բ) nm: **28.** 125:

§ 3. Հանրահաշվական անհավասարություններ: Անհավասարությունների ապացուցում

38. *Ց ու ց ու մ*: Օգտվել $\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k+1}\right)$ անհավասարությունից:

44. *Ց ու ց ու մ*: Եթե m և k-ն 1-ից տարբեր որևէ երկու արտադրիչներ են, ապա նրանցից մեկը փոխարինելով mk-ով (որպես մեկ արտադրիչ), իսկ մյուսը՝ 1-ով, ապա նոր զույգ արտադրիչների գումարը կմեծանա (ստուգեք $mk+1>m+k$ անհավասարության ճիշտ լինելը):

54. *Ց ու ց ո ւմ:* Նկատել, որ $k\geq 3$ դեպքում $\dfrac{1}{k!}<\dfrac{1}{2^{k-1}}$

57. *Ց ու ց ու մ:* $1,\ \underbrace{1+1/n,\ 1+1/n,\ \cdots,\ 1+1/n}_{n}$ թվերի համար կիրառել Կոշիի անհավասարությունը:

59. *Ց ու ց ու մ*: Պայմանից հետևում է, որ

$$a+\frac{2}{a}\leq 3,\quad b+\frac{2}{b}\leq 4,\quad c+\frac{2}{c}\leq 5$$

Այնուհետև $P=a+b+c$ և $q=\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{4}{c}$ թվերի համար կիրառել $pq\leq\left(\dfrac{p+q}{2}\right)^2$ անհավասարությունը:

62. *Ցուցում:* $\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}, \ldots, \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}$ և $\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, \ldots, \sqrt{b_n}$ թվերի համար կիրառել Բունյակովսկու անհավասարությունը:

63. *Ցուցում:* Օգտվելով Կոշիի անհավասարությունից կարող ենք գրել՝

$$\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}} = \sqrt[k+1]{\underbrace{1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1}_{k}\cdot \frac{k+1}{k}} < \frac{k+\frac{k+1}{k}}{k+1} = 1+\frac{1}{k(k+1)} = 1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

Վերցնելով՝ $k = 1, 2, \ldots n$ ապա ստացված անհավասարությունները գումարելով, կստանանք ապացուցելիք անհավասարությունը:

§ 4. Մեկ փոփոխականով բազմանդամներ: Բազմանդամների բաժանելիությունը

2. Այո: **5.** $m=1; n=-30$: **7.** ա) 1024: *Ցուցում:* P(x) բազմանդամի բոլոր գործակիցների գումարը հավասար է P(1)-ի; բ)512; գ) 512: **9.** $a=\frac{13}{3}$, $b=\frac{23}{3}$:
10. $p=\pm 4$, $q=-80$: **12.** $p=\pm\sqrt{2}$, $q=1$: **13.** $c=-7,\ d=-1$ կամ $c=-12,\ d=-2$: **14.** $a=m^2,\ b=m^3,\ c=m^4$, որտեղ $m\in R$: **16.** 0:
17. $3a\in Z,\ 2b\in Z,\ a+b+c\in Z,\ d\in Z$: *Ցուցում:*

$$ax^3+bx^2+cx+d = 3a\cdot\frac{x^3-x}{3}+2b\cdot\frac{x^2-x}{2}+(a+b+c)x+d$$: **19.** Այո:

20. $P(x_i)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}y_i$: **21.** Չորրորդը:

22. Ցուցում: Տրված f(x) և g(x) բազմանդամները ներկայացնել՝ $f(x)=2f_1(x)+f_2(x)$, $g(x)=2g_1(x)+g_2(x)$ տեսքերով, որտեղ $f_2(x)$ և $g_2(x)$ բազմանդամների գործակիցները կենտ են կամ հավասար են զրոյի: Խնդրի պայմանից հետևում է, որ $f_2(x)\,g_2(x)$ արտադրյալ բազմանդամի գործակիցները զույգ են կամ հավասար են զրոյի: Եթե f_2 և g_2 բազմանդամները զրոյականից տարբեր լինեն, ապա $f_2(x)\,g_2(x)$ արտադրյալ բազմանդամի ավագ գործակիցը կլինի կենտ, որը կհակասի վերն արված դատողությանը: Նշանակում է՝ f(x) և g(x) բազմանդամներից մեկի (և միայն՝ մեկի) բոլոր գործակիցները զույգ են:

28. $a=-52,\ b=-67$: **33.** Երրորդը: **34.** Չորրորդը: **38.** $x^3-14x^2+49x-36$:
39. p^2-2q: **40.** *Ց ու ց ու մ* : Խնդրի պայմանից հետևում է, որ a,b,c թվերը $x^3+px+q=0$ հավասարման արմատներն են: **46.** $a=-21$, $b=-45$, $x_3=5$:
47. 0: **48.** Ցուցում: Դիցուք, $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ -ը տրված P(x) բազմանդամի արմատներն են: Պայմանից հետևում է, որ այդ թվերը բացասական են: Քանի որ $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$, ուստի
$P(3)=(3-x_1)(3-x_2)(3-x_3)(3-x_4)$: Այնուհետև նկատել, որ

$$3-x_k=1+1+1+(-x_k)\geq 4\sqrt[4]{-x_k}\ (k=1,2,3,4)\ \text{և}\ x_1\,x_2\,x_3\,x_4=16:$$

49. բ) (x+1)(x+2)(2x-1); դ) (x-1)(x+1)³; զ) (x+1) (2x - 1) (x²-4x+1):
50. ա) $x_1=1$; բ) $x_1=2$, $x_2=-3$; գ) $x_1=1$; դ) $x_1=2$: **51.** բ) $x_1=\frac{1}{2}$; գ) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{3}$:

52. ա) 2; $\frac{-1\pm\sqrt{37}}{6}$; բ) -1; $\frac{2}{3}$; 2: **53.** p=3 կամ p=7: **55.** 250:

57. Ցուցում: Դիցուք, $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$: Խնդրի պայմաններից հետևում է, որ a_0-ն կենտ է, իսկ $(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0)$ -ը՝ զույգ թիվ: Այդ դեպքում, ցանկացած ամբողջ x-ի համար P(x)-ը կլինի կենտ թիվ, ուստի և չի կարող հավասարվել զրոյի:

58. *Ց ու ց ու մ*: Եթե տրված հավասարումն ունենար ռացիոնալ արմատ, ապա այն կլիներ ամբողջ, ընդ որում՝ ազատ անդամի բաժանարար: Դժվար չէ նկատել, որ $\pm1,\pm n$ թվերից ոչ մեկը չի բավարարում տրված հավասարությանը (դրանք են միայն ազատ անդամի բաժանարարները):
59. $a=-7$, b=1, c=6: **60.** Լուծում: Դիցուք, k_1,k_2,k_3,k_4,k_5 ամբողջ արժեքների դեպքում P(x)-ն ընդունում է 5-ին հավասար արժեք: Այդ դեպքում՝ $P(x)-5=(x-k_1)(x-k_2)(x-k_3)(x-k_4)(x-k_5)\cdot Q(x)$, որտեղ Q(x)-ն ամբողջ գործակիցներով բազմանդամ է: Հետևաբար, ցանկացած x=m ամբողջ թվի դեպքում կունենանք թվային ճիշտ հավասարություն՝
$P(m)-5=(m-k_1)(m-k_2)(m-k_3)(m-k_4)(m-k_5)\cdot Q(m)$:

Եթե որևէ m-ի դեպքում P(m)-ը հավասար լինի զրոյի, ապա վերջին հավասարությունից կհետևի, որ -5 –ը ներկայացվել է միմյանցից տարբեր առնվազն հինգ ամբողջ թվերի արտադրյալի տեսքով, որը հնարավոր չէ: Նշանակում է՝ ոչ մի ամբողջ m-ի դեպքում P(x)-ը չի կարող հավասարվել զրոյի:

61. a=40, $b=-80$, c=80: *Ցուցում*: Դիցուք, տրված հավասարման արմատները $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$ դրական թվերն են: Վիետի թեորեմի համաձայն՝

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10 \quad \text{և} \quad x_1 x_2 x_3 x_4 x_5=32:$$

Այնուհետև $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$ թվերի համար կիրառել թվաբանական և երկրաչափական միջինների հայտնի կապը (Կոշիի անհավասարությունը):

62. Լուծում: Ենթադրենք հակառակը. P(x)-ը կարող է ներկայացվել որևէ երկու՝ f(x) և g(x) բազմանդամների արտադրյալի տեսքով, որտեղ f(x)-ի աստիճանը փոքր է g(x)-ի աստիճանից: Ակնհայտ է, որ f(x)-ը երրորդից ոչ բարձր աստիճանի բազմանդամ է: Դիցուք, $k_1,\ k_2,\cdots,\ k_7$ -ն այն ամբողջ թվերն են, որոնց դեպքում $P(k_i)=1$ կամ -1 ուստի՝ $f(k_i)\cdot g(k_i)=1$ կամ -1, որտեղ $i=1,2,\cdots,7$: Նշանակում է՝ $f(k_i)=1$ կամ -1: Հասկանալի է, որ $f(k_i)$ թվերից գոնե չորսը միմյանց հավասար են. որոշակիության համար ընդունենք, որ

$$f(k_1)=f(k_2)=f(k_3)=f(k_4)=1:$$

Այդ դեպքում

$$f(x)-1=(x-k_1)(x-k_2)(x-k_3)(x-k_4)\cdot q(x),$$

որտեղ $q(x)$-ը քանորդ բազմանդամն է: Ստացված հավասարության ձախ մասը երրորդից ոչ բարձր աստիճանի բազմանդամ է, մինչդեռ նրա աջ մասի արտահայտությունը ներկայացնում է չորրորդից ոչ ցածր աստիճանի բազմանդամ: Ստացված հակասությունն ապացուցում է խնդրի պնդումը:

5. Ամբողջ և կոտորակային մասեր պարունակող առաջադրանքներ

1. $\left[2;\dfrac{11}{5}\right)$: **2.** $\left[-4;\dfrac{7}{2}\right)$: **3.** $[8;10)$ **4.** $\varnothing$: **5.** $x=k+0,5$, որտեղ $k\in Z$:

6. $x=5k+1$, $k\in Z$:**7.** ∅: **8.** $x=3k+2$, $k\in Z$: **9.** $[7;8)$: **10.** $[3;10/3)$:

11. $\left(-\sqrt{101};\,-10\right]\cup\left[10;\,\sqrt{101}\right]$: **12.** $\emptyset$: **13.** $[2;\,3)$: **14.** $x=3+\sqrt{k}$, $k\in Z$:

15. $\left[\frac{9}{2};\,\frac{11}{2}\right)$: **16.** 30;32;34: **17.** -4;-11/4; -3/2;-1/4:

18. 0; 1/5; 2/5; 3/5; 4/5: **19.** $x=7/3$: **20.** $x=\sqrt{5}$: **21.** 9/2; 5: **22.** $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$

34. ա) 99; բ) 2016: **36.** բ) $x\in\left(k+\frac{1}{4};\,k+1\right),\,k\in Z$:

38. ա) $2\pi k,\,k\in Z$; բ) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\,k\in Z$: **40.** բ) $\left[k+\frac{1}{2};\,k+1\right),\,k\in Z$:

41. 7: **42.** 7: **43.** 100: **44.** 30:

45. *Ցուցում*: Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n թվի համար

$$\sqrt{9n+8}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}<\sqrt{9n+9}$$

46. *Ցուցում:* Օգտվել

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$

անհավասարությունից:

47. 2016: *Ցուցում*: Տե՛ս §3, №63 խնդիրը:

50. *Ցուցում:* Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n թվի դեպքում

$$\sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$$

52. $\frac{n-1}{2}$:

§5. Հանրահաշվական ռացիոնալ հավասարումներ

3. -4; $\pm\sqrt{2}$: **4.** 3: **5.** 1: **6.** -1: **7.** -1; $-3\pm\sqrt{11}$: **8.** $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3}$; 3:

9. -1; 2: **10.** $\frac{1}{2}$; 2: **11.** $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$; $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$: **12.** $-1\pm\sqrt{3}$; $\frac{7\pm\sqrt{337}}{12}$:

14. -4; ±3: **15.** 8; $\frac{4}{5}$: **16.** $-\frac{4}{5}$: **17.** 1; 11: **18.** 4,9: **19.** $\frac{9}{4}$:

20. 0; $-\frac{9}{2}$: **21.** -1; $\frac{1}{3}$; 3: **22.** $-\frac{3}{2}$; -1: **23.** ±2: **24.** 1:

25. $\frac{1}{2}$; 2 : **26.** $-2;\ \pm1;\ 0$: **27.** 1: **28.** -7; 2: **29.** -2; 5

30. $\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$: **31.** $-\frac{1}{2}$: **32.** $-\frac{1}{2}$: **33.** $\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ 1$: **34.** -3:

35. -5; -3: **36.** $3\pm\sqrt{2}$: *Ցուցում:* $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ տեսքի հավասարումը $y=x+\frac{a+b}{2}$ փոփոխականի փոխարինումով հանգեցվում է երկքառակուսային (բիկվադրատ) հավասարման: **37.** $\frac{1}{2}$; 2 38. $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}$: **39.** $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$: **40.** -1; $-\frac{1}{4}$: **41.** 2; 6: **42.** -1; 9; $\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$: **43.** $-\frac{5}{3};-\frac{5}{4};\ \frac{5}{2}$; 5: **44.** -1: **51.** 2: **52.** -3:

§ 6. Էքստրեմումային խնդիրներ

1. $\frac{48\left(4-\sqrt{3}\right)}{13}$ սմ, $\frac{12\left(4\sqrt{3}-3\right)}{13}$ սմ: **2.** 6սմ կողմով քառակուսի:
3. 4 սմ կողմով քառակուսի: **4.** 45°: **5.** 45°: **6.** 45°: **7.** 45°:
8. Հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն:
9. Հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն: **10.** $\frac{3}{8}C$, $\frac{C}{2}$: **11.** 2 սմ:

12. 10 սմ, 50 սմ²: **13.** $\frac{a}{2};\frac{a}{2}$: **14.** $\frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$: **15.** Հիմքին տարած բարձրության կեսի չափ:
16. 6 սմ (հիմքի վրա) և 5սմ կողմերով զուգահեռագիծ:
17. Հիմքին զուգահեռ կողմը եռանկյան միջին գիծն է:
18. BC կողմի միջնագիծը: **19.** P²: **20.** 72: **21.** 12սմ, 12սմ:

22. $\frac{6+\sqrt{3}}{33}a$, $\frac{\sqrt{5-\sqrt{3}}}{22}a$: **23.** $\frac{2a}{4+\pi};\ \frac{a}{4+\pi}$: **24.** 18 սմ²: **25.** $\frac{a^2}{8}\sin\alpha$:
26. Շոշափողից 1,5 R հեռավորությամբ, որտեղ R-ը շրջանագծի շառավիղն է:
27. 68 սմ: **28.** $\alpha = 30°$; $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ սմ²: **29.** $1-\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$:

30. AB-ի միջնուղղահայացի և շրջանագծի մեծ աղեղի հատման կետը:
31. R, R, R: **32.** R: **33.** P/4 շառավղով և 2 ռադիան կենտրոնական անկյունով:
34. $2R\cos\frac{\alpha}{2}$, $2R\cos\frac{\alpha}{2}$: **35.** M կետը $\left(3+2\sqrt{2};\,0\right)$ կետին միացնող ուղիղը:
36. M կետը $(10;\,0)$ կետին միացնող ուղիղը: **37.** M կետը համընկնում է A կետին:
38. M-ը C գագաթից տարված բարձրության հիմքն է: **39.** 30°:
40. $\sqrt{10}+1$: **41.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$: **42.** Ամենամեծ շրջանի շառավիղը հավասար է $2R$ կողմով կանոնավոր եռանկյանն արտագծած շրջանագծի տրամագծին, այսինքն՝ $\frac{2R}{3}$: Ընդհանուր դեպքում, եթե գոյություն ունի $2R_1$, $2R_2$, $2R_3$ կողմերով սուրանկյուն եռանկյուն, ապա այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղն էլ կլինի որոնելին: Մնացած դեպքերում ամենամեծ շրջանագծի շառավիղը հավասար է R_1, R_2, R_3 թվերից ամենամեծին:
43. Դիցուք, M_1-ը և M_2-ը M կետի համաչափ կետերն են: OA և OB ուղիղների նկատմամբ և M_1M_2 հատվածն այդ ուղիղները հատում է N և K կետերում: Այդ դեքում MNK եռանկյունը կլինի որոնելին:
46. Որոնելի M կետը C գագաթից տարված բարձրության հիմքն է:
470. Որոնելի O կետը ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է:
48. *Ցուցում:* Ամենից առաջ համոզվել, որ եռանկյան ներսում գոյություն ունի այնպիսի Q կետ, որից եռանկյան բոլոր կողմերը երևում են 120° անկյան տակ: Այնուհետև ապացուցել, որ հենց այդ Q կետն էլ որոնելին է:
49. Կանոնավոր եռանկյուն:
51. Որոնելին տրված քառանկյան անկյունագծերի հատման կետն է:
52. 25: **53.** $AB : BC = 2 : 1$:
54. Որոնելի M կետն այնպիսին է, որ BM : MC = AK : KD:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Կորյուն Գարեգինի Առաքելյան
Հայկազն Սարիբեկի Նավասարդյան
Արման Հովհաննեսի Սարգսյան

Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա

ԽՈՐԱՑՎԱԾ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

10-րդ դասարան

Խմբագիր՝ **Կորյուն Առաքելյան**
Կազմի ձևավորումը՝ **Գևորգ Շառոյանի**
Համակարգչային ձևավորումը՝ **Հրայր Շառոյանի**
Համակարգչային շարվածքը՝ **Հասմիկ Առաքելյանի**

Ստորագրված է տպագրության 15.08.2016:
Չափսը՝ 60x84 1/16: Թուղթը՝ օֆսեթ:
Տպագրությունը՝ օֆսեթ: 8 տպ. մամուլ:
Տպաքանակը՝ 200 օրինակ:

«ԳԵՎՈՐԳ - ՀՐԱՅՐ» ՍՊԸ

Հրատարակչություն
Երևան, Գրիգոր Լուսավորչի 6:
Հեռ.՝ 52.79.74
էլ. փոստ lusakn@rambler.ru