ԿՈՐՅՈՒՆ ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
ՀԱՅԿԱԶՆ ՆԱՎԱՍԱՐԴՅԱՆ
ԱՐՄԱՆ ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա

ԽՈՐԱՑՎԱԾ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

11-րդ դասարան

Երևան 2016

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻՆ ԱՌԸՆԹԵՐ ԱՐՏԱՇԵՍ ՇԱՀԻՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՖԻԶԻԿԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՏՈՒԿ ԴՊՐՈՑ

Ձեռնարկը համապատասխանեցված է ԿԳ նախարարության կողմից հաստատված մաթեմատիկայի մասնագիտացման ուղղվածության ծրագրին

Նախաբան

Մաթեմատիկական կրթությունը և մաթեմատիկական մտածելակերպն անհրաժեշտ են ոչ միայն նրանց, ովքեր հետագայում կզբաղվեն մաթեմատիկայով կամ գիտական որևէ հետազոտությամբ, այլ նաև բոլոր նրանց, ովքեր կաշխատեն ժողովրդական տնտեսության տարբեր բնագավառներում:

Կրթության գործընթացում մաթեմատիկական խնդիրներն ունեն ուսուցողական, գործնական և դաստիարակչական նշանակություն: Նրանք զարգացնում են սովորողների ալգորիթմական, տրամաբանական մտածողությունը, մշակում մաթեմատիկան կիրառելու գործնական հմտություններ, ձևավորում աշխարհայացք: Խնդիրների լուծումը նրանց մղում է ստեղծագործական աշխատանքի:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասագրքերում զետեղված խնդիրները, որպես կանոն, նպատակաուղղված են տվյալ թեմայի տեսական նյութի յուրացմանը: Սահմանափակվելով միայն դասագրքում ընդգրկված խնդիրներով՝ սովորողների մոտ կարող են ձևավորվել միայն սերտողական բնույթի գիտելիքներ: Միօրինակ կամ միայն ալգորիթմական խնդիրները չեն կարող ապահովել սովորողների մտավոր զարգացմանը ներկայացվող պահանջներին:

Մաթեմատիկայի նկատմամբ հակումներ ունեցող սովորողները չեն բավարարվում մաթեմատիկայի դասերին ստացած գիտելիքներով, հետևաբար և ցանկություն է առաջանում ավելի շատ տեղեկություն ստանալ իրենց սիրած առարկայի մասին, իմանալ, թե ինչպես է այն կիրառվում կյանքում, լուծել հետաքրքիր և ավելի բարդ խնդիրներ:

Սույն ձեռնարկում ընդգրկված նյութերը կարող են նպաստել մաթեմատիկական գիտելիքների ընդլայնմանը, ծրագրային նյութը խորությամբ յուրացնելուն, տրամաբանական մտածողության զարգացմանը, հետազոտական ունակությունների ձևավորմանը, ինչպես նաև՝ մաթեմատիկական խոսքի կուլտուրայի զարգացմանը:

Գիրքը նախատեսված է մասնագիտացված դպրոցների, բնագիտամաթեմատիկական թեքումով 11-րդ դասարանի սովորողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցիչներին՝ արտադասարանական պարապմունքներ անցկացնելու, ինչպես նաև աշակերտներին՝ մաթեմատիկական օլիմպիադաներին նախապատրաստվելու համար:

§1. ԹՎԱՅԻՆ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԸ

1. Հաջորդականության սահմանումը: Սահմանափակ և անսահմանափակ հաջորդականություններ

Այնպիսի f թվային ֆունկցիան, որի **որոշման տիրույթը բնական թվերի բազմությունն է**, անվանում են **թվային հաջորդականություն** (կամ պարզապես՝ *հաջորդականություն*):
Այդ ֆունկցիայի արժեքը $n \in N$ կետում նշանակում են f_n, իսկ ինքը՝ հաջորդականությունը գրառվում է այսպես՝

$$f_1; f_2; f_3; \ldots; f_n; \ldots$$

կամ հակիրճ՝ (f_n):

Հաջորդականությունը նշելու համար ավելի հաճախ գործածում են հետևյալ նշանակումները՝ $(a_n), (b_n), (c_n), (x_n)$ և այլն:
Հաջորդականությունը համարվում է **տրված**, եթե նշված է այն **օրենքը (կանոնը)**, ըստ որի յուրաքանչյուր n բնական թվի համապատասխանեցվում է լիովին որոշակի a_n թիվ:
a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ թվերը կոչվում են (a_n) հաջորդականության **տարրեր** կամ **անդամներ**, ընդ որում, a_1-ը՝ առաջին անդամ, a_2-ը՝ երկրորդ անդամ, a_n-ը՝ n-րդ անդամ: n թիվն անվանում են a_n անդամի **համար**:
Թվային հաջորդականությունը տալու երկու հիմնական եղանակ կա:
1) Հաջորդականությունը կարող է տրվել

$$a_n = f(n), \ \ n \in N$$

բանաձևի միջոցով՝ a_n-ը արտահայտված n համարով:

Օրինակ, յուրաքանչյուր բնական n թվի համապատասխանության մեջ է դրվում $f(n) = \dfrac{2n}{n^2 + 1}$ թիվը, որով և որոշվում է

$$1; \ \frac{4}{5}; \ \frac{3}{5}; \ \frac{8}{17}; \ldots; \frac{2n}{n^2 + 1}; \ldots$$

հաջորդականությունը՝ $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$ n **-րդ անդամի բանաձևով:**

2) Հաջորդականությունը տալու համար գործածում են նաև **անդրադարձ (ռեկուրենտ)** բանաձևեր. տալիս են հաջորդականության առաջին k անդամները և a_{n+k} անդամը (բոլոր բնական n-երի դեպքում) նախորդ k անդամներով արտահայտող բանաձևը (ավելի հաճախ $k=1$ կամ $k=2$):

Օրինակ, $a_1 = 0, a_2 = 1$ սկզբնական պայմաններով և $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ անդրադարձ բանաձևով տրվում է հետևյալ անվերջ թվային հաջորդականությունը՝

$0;\ 1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13;\ 21;\dots$

Այդ հաջորդականությունն անվանում են **Ֆիբոնաչիի** հաջորդականություն:

Անդրադարձ առնչություններով տրվող հաջորդականությունները հանդիպում են մաթեմատիկայի շատ հարցերում և նրա կիրառություններում: Օրինակ, քառակուսի արմատների մոտավոր արժեքները գտնելու համար կառուցվում են անդրադարձ հաջորդականություններ: $\sqrt{a}$ -ն գտնելու համար վերցնում են ցանկացած դրական x_1 թիվ և կազմում հետևյալ հաջորդականությունը՝ $x_1; x_2; \dots; x_n; \dots$, որտեղ $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$:

Օ ր ի ն ա կ 1: ***Ապացուցենք, որ*** $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 3\ (n \in N)$ ***անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության*** n ***-րդ անդամն ունի*** $a_n = 2^{n+1} - 3\ (n \in N)$ ***տեսքը:***

Լուծում: Օգտվենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից:

$n=1$ դեպքում ունենք՝

$$a_1 = 2^{1+1} - 3 = 1,$$

որը ճիշտ է ըստ խնդրի պայմանի: Ենթադրենք, թե պնդումը ճիշտ է $n=k\ (k \ge 1)$ դեպքում, այսինքն՝

$$a_k = 2^{k+1} - 3:$$

a_k-ի արժեքը տեղադրելով $a_{k+1}=2a_k+3$ անդրադարձ առնչության մեջ, կստանանք՝ $a_{k+1}=2(2^{k+1}-3)+3=2^{k+2}-3$, որն էլ ապացուցվելիք հավասարությունն է՝ $n=k+1$ դեպքում: Հետևաբար, ցանկացած բնական n-ի դեպքում

$$a_n=2^{n+1}-3:$$

Օ ր ի ն ա կ 2: ***Ապացուցենք, որ եթե*** (a_n) ***հաջորդականությունը տրվում է*** $a_1=1$, $a_2=5$ ***և*** $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$, $n\in N$ ***անդրադարձ առնչությամբ, ապա նրա*** n ***-րդ անդամը կարելի է որոշել*** $a_n=3^n-2^n$ $(n\in N)$ ***բանաձևով:***

Լուծում: $n=1$ և $n=2$ դեպքերում, համապատասխանաբար, կստանանք՝

$$a_1=3^1-2^1=1 \text{ և } a_2=3^2-2^2=5,$$

որը ճիշտ է՝ համաձայն խնդրի պայմանի:

Ենթադրենք, թե այդ օրինաչափությունը ճիշտ է $n=k$ և $n=k+1$ արժեքների դեպքում, այսինքն՝

$$a_k=3^k-2^k,\ a_{k+1}=3^{k+1}-2^{k+1}:$$

Ցույց տանք, որ $n=k+2$ դեպքում ևս տեղի ունի այդ օրինաչափությունը: Իրոք,

$$a_{k+2}=5a_{k+1}-6a_k=5(3^{k+1}-2^{k+1})-6(3^k-2^k)=$$
$$=15\cdot 3^k-10\cdot 2^k-6\cdot 3^k+6\cdot 2^k=9\cdot 3^k-4\cdot 2^k=3^{k+2}-2^{k+2}:$$

Համաձայն մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի խնդիրը լուծված է:

* * *

(x_n) հաջորդականությունը կոչվում է **սահմանափակ ներքևից**, եթե գոյություն ունի այնպիսի A թիվ, որ ցանկացած $n\in N$ դեպքում տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$x_n\ge A:$$

(x_n) հաջորդականությունը կոչվում է **սահմանափակ վերևից**, եթե գոյություն ունի այնպիսի B թիվ, որ ցանկացած $n \in N$ դեպքում տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$x_n \leq B :$$

(x_n) հաջորդականությունը կոչվում է **սահմանափակ**, եթե գոյություն ունեն այնպիսի A և B թվեր, որ բոլոր բնական n-երի համար տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$A \leq x_n \leq B :$$

Վերջին սահմանումը համարժեք է հետևյալին.

(x_n) հաջորդականությունը կոչվում է **սահմանափակ**, եթե գոյություն ունի այնպիսի $C > 0$ թիվ, որ բոլոր $n \in N$ թվերի համար ճիշտ է $|x_n| \leq C$ անհավասարությունը:

Օրինակ 3: ***Ապացուցենք, որ*** $x_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$ ***ընդհանուր անդամն ունեցող հաջորդականությունը սահմանափակ է:***

Լուծում: Ակնհայտ է, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում $\dfrac{2n}{n^2+1} > 0$: Ցույց տանք, որ $\dfrac{2n}{n^2+1} \leq 1$, այսինքն՝ $2n \leq n^2 + 1 \Leftrightarrow$ $n^2 + 1 - 2n \geq 0 \Leftrightarrow (n-1)^2 \geq 0$: Այսպիսով, ցանկացած $n \in N$ դեպքում՝

$$0 < \frac{2n}{n^2+1} \leq 1 :$$

Նշանակում է՝ (x_n) հաջորդականությունը սահմանափակ է $(A = 0,\ B = 1)$:

Օրինակ 4: ***Ապացուցենք, որ*** $x_n = \dfrac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}}$ ***բանաձևով տրված հաջորդականությունը սահմանափակ է:***

Լուծում: Քանի որ

$$|(-1)^n n + 10| < |(-1)^n n| + 10 = n + 10 \quad \text{և} \quad \sqrt{n^2+1} > n,$$

ուստի կարող ենք գրել՝

$$|x_n| = \frac{|(-1)^n n + 10|}{\sqrt{n^2+1}} \le \frac{n+10}{n} = 1 + \frac{10}{n} \le 11:$$

Այսպիսով, ցանկացած բնական n -ի դեպքում $|x_n| < 11$,
որից էլ հետևում է, որ (x_n) հաջորդականությունը սահմանափակ է $(C = 11):$

Օ ր ի ն ա կ 5: ***Ապացուցենք, որ*** $x_n = \dfrac{100-n^3}{n^2-10}$ ***ընդհանուր անդամն ունեցող հաջորդականու-թյունը սահմանափակ չէ:***

Լուծում: Ունենք՝

$$|x_n| = \frac{n^3\left|\frac{100}{n^3}-1\right|}{n^2\left|1-\frac{10}{n^2}\right|} = n\left|\frac{\frac{100}{n^3}-1}{1-\frac{10}{n^2}}\right|:$$

Եթե $n \ge 6$, ապա

$$\frac{100}{n^3} < \frac{1}{2} \quad \text{և} \quad 1 - \frac{100}{n^3} > \frac{1}{2}, \text{ իսկ } 0 < 1 - \frac{10}{n^2} < 1,$$

ուստի կարող ենք գրել՝

$$|x_n| = n \cdot \frac{1-\frac{100}{n^3}}{1-\frac{10}{n^2}} > n \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{n}{2}:$$

Կամայական դրական C թվի համար վերցնենք $n > 2C$ (օրինակ, $n = [2C]+1$), այդ դեպքում

$$|x_n| > \frac{n}{2} > C:$$

Նշանակում է՝ տրված հաջորդականությունը սահմանափակ չէ:
Հաջորդականությունը, որը սահմանափակ չէ, կոչվում է *անսահմանափակ*:
Ձևակերպենք անսահմանափակ հաջորդականության սահմանումը՝ կառուցելով սահմանափակ հաջորդականության սահմանման ժխտումը.

(a_n)-ը անսահմանափակ հաջորդականություն է, եթե ցանկացած M թվի համար կգտնվի այնպիսի n համար, որ $|a_n| > M$:

Եթե հաջորդականության անդամները պատկերվեն կոորդինատային ուղղի կետերով, ապա սահմանափակ հաջորդականության բոլոր անդամներն ընկած եմ մի որոշ հատվածի վրա: Անսահմանափակ հաջորդականության համար ցանկացած հատվածից դուրս կգտնվեն այդ հաջորդականության անդամներ:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. Գտնել հաջորդականության առաջին հինգ անդամները, որի n-րդ անդամն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով.

ա) $\dfrac{n-2}{n^2+1}$; բ) $\dfrac{1}{n!}$; գ) $\dfrac{(-1)^n}{n^3+1}$; դ) $(-1)^{n-1}n^{-2}$:

Հաջորդականության առաջին մի քանի անդամներով ընտրել որևէ բանաձև նրա n-րդ անդամի համար (2-8).

2. $\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{5}; \dfrac{3}{7}; \dfrac{4}{9}; \ldots$:

3. $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{12}; \dfrac{1}{20}; \ldots$:

4. $1; \dfrac{2}{101}; \dfrac{4}{201}; \dfrac{8}{301}; \ldots$:

5. $\dfrac{1}{3}; \dfrac{4}{9}; \dfrac{9}{27}; \dfrac{16}{81}; \ldots$:

6. $-1; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{4}; \ldots$:

7. $\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{5}; \dfrac{3}{10}; \dfrac{4}{17}; \ldots$:

8. $1; 2; 6; 24; 120; \ldots$:

Գտնել (a_n) հաջորդականության ամենամեծ անդամի համարը, եթե (9-12)

9. $a_n = 12n - n^2$:

10. $a_n = 11n - n^2$:

11*. $a_n = \dfrac{10n}{100+n^2}$:

12*. $a_n = \dfrac{n^5}{2^n}$:

13. Ապացուցել, որ (a_n) հաջորդականությունը, որտեղ $a_n = 3^n + 5\cdot 2^n$, բավարարում է $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ անդրադարձ առնչությանը և $a_1 = 13,\ a_2 = 24$ սկզբնական պայմաններին:

14. Տրված է (a_n) հաջորդականությունը՝

$$a_1 = \frac{14}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3}(27a_n + 32):$$

Ապացուցել, որ $a_n = \frac{2}{3}(9^n - 2),\ n \in N$:

15. Տրված է (b_n) հաջորդականությունը՝

$$b_1 = 3,\ b_2 = 15, \qquad b_{n+2} = 5b_{n+1} - 4b_n:$$

Ապացուցել, որ $b_n = 4^n - 1,\ n \in N$:

16. Դիցուք՝ $C_1 = 1, C_2 = 3, C_{n+2} = 3C_{n+1} - 2C_n$,: Գտնել այդ հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը:

17. Դիցուք՝ $C_1 = C_2 = 1, C_{n+2} = 3C_n + 2C_{n+1}$,: Գտնել այդ հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը:

18*. Տրված է Ֆիբոնաչիի հաջորդականությունը՝

$$a_1 = a_2 = 1:\ \ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \in N:$$

Ապացուցել, որ այդ հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$ (**Բինեի** բանաձևը):

Ապացուցել, որ հաջորդականությունը սահմանափակ է (19-24)

19. $\left(\frac{100n}{n-1}\right)$: **20.** $\left(\frac{n+(-1)^n}{3n-1}\right)$: **21.** $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)$:

22. $\left(\frac{n^3}{2^n}\right)$: **23*.** $\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)$: **24*.** $\left(\frac{2^n}{n!}\right)$:

Ապացուցել, որ (a_n) հաջորդականությունն անսահմանափակ է(25-30).

25. $a_n = (-1)^n n$: **26.** $a_n = n^2 - n$:, **27.** $a_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$:

28. $a_n = n + (-1)^n n$: **29*.** $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$:

30*. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$:

31. Բերել սահմանափակ հաջորդականության օրինակ, որի բոլոր անդամները պատկանեն՝

ա) $[1;2]$ հատվածին, բ) $\left[\frac{49}{100};\frac{51}{100}\right]$ հատվածին:

2. Հաջորդորդականության սահմանը Զուգամետ և տարամետ հաջորդորդականություններ

Ս ա հ մ ա ն ու մ : a **թիվը կոչվում է** (x_n) **հաջորդականության սահման, եթե ցանկացած դրական** ε **թվի համար գոյություն ունի այնպիսի բնական** n_0 **թիվ, որ ցանկացած բնական** $n \geq n_0$ **թվի համար տեղի ունի**

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

անհավասարությունը:

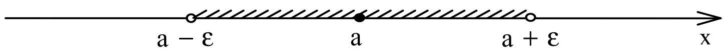
Այն փաստը, որ a-ն (x_n) հաջորդականության սահմանն է, գրառում են այսպես՝

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{կամ [1)]} \quad x_n \to a \text{, երբ } n \to \infty :$$

Ասում են, որ x_n փոփոխականը **զուգամիտում** է a-ին (x_n-ը ձգտում է a-ին), ինչպես նաև՝ (x_n) հաջորդականությունը **զուգամիտում** է a-ին: Նկատենք, որ $|x_n - a| < \varepsilon$ անհավասարությունը համարժեք է հետևյալ կրկնակի անհավասարությանը՝

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon :$$

Այդ նշանակում է, որ x_n թիվն ընկած է $(a-\varepsilon;\, a+\varepsilon)$ միջակայքում: Այդպիսի միջակայքն անվանում են a կետի ε *-շրջակայք* (նկ. 1):



Նկ. 1

Հաջորդականության սահմանի սահմանումը կարելի է ձևակերպել նաև այլ կերպ՝ տալով նրան երկրաչափական դիտողականություն.
a թիվը կոչվում է (x_n) **հաջորդականության սահման**, եթե a թվի ցանկացած ε շրջակայքում գտնվում են հաջորդականության

[1)] lim-ը լատիներեն limes բառի համառոտագրությունն է, որը նշանակում է «սահման»:

համարյա բոլոր անդամները (այդ շրջակայքից դուրս մնալ կարող են, թերևս, միայն վերջավոր թվով անդամներ): Իրոք, եթե $x_n \to a$, երբ $n \to \infty$, ապա յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի n_0, որ հաջորդականության $n > n_0$ համարներ ունեցող բոլոր անդամներն ընկած են a թվի ε-շրջակայքում. նշանակում է՝ այդ շրջակայքից դուրս կարող են գտնվել հաջորդականության միայն առաջին n_0 անդամները: Օրինակ, $x_n = \dfrac{n+1}{n}$ ընդհանուր անդամն ունեցող հաջորդականության բոլոր անդամները, բացի առաջին տասից, ընկած են $a = 1$ կետի $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ – շրջակայքում, քանի որ

$$-\frac{1}{10} < \frac{n+1}{n} - 1 < \frac{1}{10}, \text{ այսինքն՝ } -\frac{1}{10} < \frac{1}{n} < \frac{1}{10}$$

անհավասարությունը տեղի ունի $n > 10$ դեպքում:

Երբ $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$, ապա պարզ է, որ բացի առաջին հազար անդամներից (x_n) հաջորդականության բոլոր անդամներն ընկած են 1 թվի $\dfrac{1}{1000}$-շրջակայքում:

Օրինակ 1: ***Օգտվելով սահմանի սահմանումից, ապացուցենք, որ 1 թիվը $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ բանաձևով տրված հաջորդականության սահմանն է:***

Լուծում: Դիտարկենք x_n-ի և 1-ի տարբերության մոդուլը՝

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}:$$

Վերցնենք ցանկացած $\varepsilon > 0$ թիվ: $|x_n - 1| < \varepsilon$ անհավասարությունը տեղի կունենա, եթե $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, այսինքն՝ $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$: Որպես n_0 վերցնենք վերջին պայմանին բավարարող որևէ բնական n թիվ: Եթե $\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right)$-ը 1-ից փոքր լինի, ապա, ակներևորեն, կարելի է վերցնել ցանկացած բնական թիվ, օրինակ, $n_0=1$, իսկ եթե $\frac{1}{\varepsilon}-1\geq 1$, ապա կարելի է ընդունել՝ $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$: Այսպիսով, ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 բնական թիվ, որ $n>n_0$ պայմանին բավարարող ցանկացած $n\in N$ դեպքում տեղի ունի $|x_n-1|<\varepsilon$ անհավասարությունը: Այդ նշանակում է, որ, իրոք, 1 թիվը (x_n) հաջորդականության սահմանն է, այսինքն՝ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$:

Օ ր ի ն ա կ 2: ***Ապացուցենք, որ*** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$:

Լուծում: Ունենք՝ $2^n=(1+1)^n>1+n$ ցանկացած $n\in N$ դեպքում (ըստ Բեռնուլլիի անհավասարության), հետևաբար, $2^n>n$ (վերջինս կարելի է հաստատել նաև մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով): Այստեղից հետևում է, որ կամայական բնական n թվի դեպքում $\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{n}$: Ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար վերցնենք $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$: Այդ դեպքում $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$, որտեղից՝ $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$: Այսպիսով՝

$$\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n-0\right|=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}<\frac{1}{n_0}<\varepsilon,\ \text{հենց որ}\ n>n_0:$$

Դրանով էլ հաստատվում է խնդրի պնդումը:

Օ ր ի ն ա կ 3: ***Դիցուք,*** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ ***և*** $x_n\geq 0$ $(n\in N)$ ***: Ապացուցենք, որ***

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}\ :$$

Լուծում: Դիտարկենք երկու դեպք.

ա) $a=0$: Սահմանի սահմանման համաձայն ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի բնական n_0, որ $n>n_0$ դեպքում $|x_n|<\varepsilon^2$:

Քանի որ, ըստ պայմանի, $x_n \geq 0$, ապա կարող ենք գրել՝ $0 \leq x_n < \varepsilon^2$, որտեղից՝ $\sqrt{x_n} < \varepsilon$: Այսպիսով,

$$\left|\sqrt{x_n} - 0\right| = \sqrt{x_n} < \varepsilon \text{, հենց որ } n > n_0 :$$

Նշանակում է՝ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 0$:

բ) $a > 0$: Ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0 \in N$ թիվ, որ $n > n_0$ դեպքում տեղի ունի $|x_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}$ անհավասարությունը: Այդ դեպքում (նույն $n > n_0$ թվերի համար) կարող ենք գրել՝

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x_n} + \sqrt{a}\right)}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}}\right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon :$$

Այդ նշանակում է, որ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$:

Ձևակերպենք հաջորդականության սահմանի սահմանման ժխտումը.

a **թիվը չի հանդիսանում** (x_n) **հաջորդականության սահման, եթե գոյություն ունի այնպիսի** ε_0 **թիվ, որ ցանկացած բնական** n_0**-ի համար կգտնվի այնպիսի** $n \geq n_0$ **համար, որ**

$$|x_n - a| \geq \varepsilon_0 :$$

Շրջակայքերի լեզվով՝ a **թիվը չի հանդիսանում** (x_n) **հաջորդականության սահման, եթե գոյություն ունի** a **թվի շրջակայք, որից դուրս գտնվում են հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ:**

Սահման ունեցող հաջորդականությունը կոչվում է **զուգամետ**, իսկ սահման չունեցողը՝ **տարամետ:**

Օ ր ի ն ա կ 4: ***Ապացուցենք, որ*** $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ***ընդհանուր անդամն ունեցող հաջորդականությունը տարամետ է:***

Լուծում: Ենթադրենք հակառակը. գոյություն ունի a թիվ, որն այդ հաջորդականության սահմանն է: Այդ դեպքում սահմանի սահմանման համաձայն $\varepsilon = \frac{1}{2}$ թվի համար կգտնվի այնպիսի բնական n_0 թիվ, որ ցանկացած $n > n_0$ համար տեղի կունենա

$$|x_n - a| < \frac{1}{2}$$

անհավասարությունը: Մասնավորապես, $n = 2n_0$ և $n = 2n_0 + 1$ դեպքերում կունենանք՝

$$|x_{2n_0} - a| < \frac{1}{2} \text{ և } |x_{2n_0+1} - a| < \frac{1}{2},$$

Հետևաբար՝ $$|x_{2n_0} - a| + |x_{2n_0+1} - a| < 1:$$

Մյուս կողմից՝ $$|x_{2n_0} - a| + |x_{2n_0+1} - a| = |x_{2n_0} - a| + |a - x_{2n_0+1}| \geq$$

$$\geq |(x_{2n_0} - a) + (a - x_{2n_0+1})| = |x_{2n_0} - x_{2n_0+1})| =$$

$$= \left|\left(1 + \frac{1}{2n_0}\right) - \left(-1 + \frac{1}{2n_0+1}\right)\right| = \left|2 + \frac{1}{2n_0} - \frac{1}{2n_0+1}\right| = 2 + \frac{1}{2n_0} - \frac{1}{2n_0+1} > 2:$$

Ստացված հակասությունն էլ ցույց է տալիս, որ այդպիսի a թիվ գոյություն չունի, այսինքն, իրոք (x_n) հաջորդականությունը տարամետ է:

* * *

Թեորեմներ զուգամետ հաջորդականությունների վերաբերյալ

Թ ե ո ր ե մ 1: **Զուգամետ հաջորդականությունն ունի միայն մեկ սահման:**

Ապացույց: Կատարենք հակասող ենթադրություն: Դիցուք՝ (x_n) հաջորդականությունն ունի երկու սահման՝ a և b $(a \neq b)$: Սահմանի սահմանման համաձայն ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունեն այնպիսի n_1 և n_2 բնական թվեր, որ $n > n_1$ դեպքում $|x_n - a| < \varepsilon$, իսկ $n > n_2$ դեպքում $|x_n - b| < \varepsilon$:Մյուս կողմից՝

$|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, հենց որ $n > n_0$, որտեղ $n_0 = \max\{n_1;\ n_2\}$:

Վերցնելով $\varepsilon=\frac{1}{2}|a-b|$ (և ընդհանրապես, $\frac{1}{2}|a-b|$-ից փոքր թիվ), ստանում ենք հակասություն, որն էլ հաստատում է թեորեմի պնդման ճշմարիտ լինելը:

Թ ե ո ր ե մ 2 : **Զուգամետ հաջորդականությունը սահմանափակ է:**

Ապացույց: Դիցուք՝ (x_n)-ը զուգամետ հաջորդականություն է և դրա սահմանը a թիվն է: Այդ նշանակում է, որ, օրինակ, $\varepsilon=1$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի բնական n_1 թիվ, որ բոլոր բնական $n>n_1$ թվերի դեպքում

$$|x_n-a|<1, \text{ այսինքն՝ } a-1<x_n<a+1:$$

Նշանակենք՝

$$x_1, x_2, \ldots x_{n_1}, \ a-1, \ a+1$$

թվերից ամենափոքրը q-ով, իսկ ամենամեծը՝ p-ով: Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ ցանկացած բնական n թվի դեպքում $q\le x_n\le p$, որն էլ ցույց է տալիս, որ (x_n) հաջորդականությունը սահմանափակ է:

Թ ե ո ր ե մ 3 : **Եթե (a_n) և (b_n) հաջորդականությունները զուգամետ են, ապա**

$$\lim_{n\to\infty} c a_n = c\lim_{n\to\infty} a_n \text{ (} c \text{-ն ցանկացած թիվ է);}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n:$$

Եթե, բացի դրանից, $b_n\ne 0$ և $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\ne 0$, ապա

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}:$$

Թեորեմ 2-ից հետևում է, որ ցանկացած անսահմանափակ հաջորդականություն տարամետ է (հիմնավորեք՝ հակասող ենթադրությամբ):

* * *

Դիտարկենք սահմաններ հաշվելու մի քանի օրինակներ:

Օ ր ի ն ա կ 5 : ***Գտնենք սահմանը՝***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-5n+2}{2n^2+7n-4}:$$

Լուծում: Կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բաժանելով n^2-ու վրա, ապա կիրառելով թեորեմ 3-ը, կստանանք՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-5n+2}{2n^2+7n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{7}{n}-\frac{4}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{7}{n}-\frac{4}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{3-5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2}{2+7\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-4\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{3}{2},\text{ քանի որ } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0:$$

Օ ր ի ն ա կ 6 : ***Գտնենք սահմանը՝***

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right):$$

Լուծում: Քանի որ

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

և $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$ (տե՛ս օրինակ 3), ապա թեորեմ 3-ի համաձայն կունենանք՝

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}:$$

Օ ր ի ն ա կ 7 : ***Գտնենք*** s ***-ը, եթե***

$$s=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right):$$

Լուծում: Օգտվելով

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

նույնությունից, կարող ենք գրել՝

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right):$$

Այսպիսով,

$$s=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}:$$

Օ ր ի ն ա կ 8 : ***Գտնենք սահմանը*** ՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}-2\cdot 5^n}{2\cdot 6^n+5^{n+1}}:$$

Լուծում: Ունենք՝

$$\frac{6^{n+1}-2\cdot 5^n}{2\cdot 6^n+5^{n+1}}=\frac{\frac{6^{n+1}}{6^n}-\frac{2\cdot 5^n}{6^n}}{2+\frac{5^{n+1}}{6^n}}=\frac{6-2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n}{2+5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n}:$$

Ցույց տանք, որ $\left(\frac{5}{6}\right)^n \to 0$, երբ $n \to \infty$: Իրոք, օգտվելով Բեռնուլլիի անհավասարությունից, կարող ենք գրել՝

$$\left(\frac{6}{5}\right)^n = \left(1+\frac{1}{5}\right)^n > 1+\frac{n}{5} > \frac{n}{5},$$

հետևաբար, $\left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{5}{n}$:

Յանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար, հենց որ $\frac{5}{n} < \varepsilon$, այսինքն՝ $n > \frac{5}{\varepsilon}$, ապա նաև $\left(\frac{5}{6}\right)^n < \varepsilon$: Վերցնենք՝ $n_0 = \left[\frac{5}{\varepsilon}\right] + 1$, այդ դեպքում $n > n_0$ պայմանով տեղի կունենա

$$\left|\left(\frac{5}{6}\right)^n - 0\right| < \varepsilon,$$

անհավասարությունը, որն էլ նշանակում է՝ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$:

Այսպիսով,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1} - 2\cdot 5^n}{2\cdot 6^n + 5^{n+1}} = \frac{6 - 2\cdot 0}{2 + 5\cdot 0} = 3:$$

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

32. Միկրոհաշվիչի օգնությամբ հաշվել արտահայտության արժեքը, երբ $n=1; 10; \ 100; 1000$: Անել ենթադրություն սահմանի արժեքի մասին, երբ $n \to \infty$ և ապացուցել դրա ճշմարիտ լինելը, եթե այդ արտահայտությունն է՝

ա) $\dfrac{4n}{n+3}$, բ) $\dfrac{3n-5}{n+7}$, գ) $\dfrac{100}{3n+97}$, դ) $\dfrac{3n^2+n}{10-n^2}$:

33. (a_n) հաջորդականության համար, որտեղ $a_n = \dfrac{4n+5}{2n-1}$.

ա) հաշվել՝ a_{50}, a_{200}, a_{1000};

բ) գնահատել հետևյալ տարբերությունների մոդուլները՝

$a_{50}-2$, $a_{200}-2$, $a_{1000}-2$:

34. Նշել այնպիսի բնական n_0 թիվ, որ բոլոր $n>n_0$ թվերի համար տեղի ունենա հետևյալ անհավասարությունը

ա) $|a_n-2|<0{,}01$, բ) $|a_n-2|<0{,}001$:

Ելնելով սահմանի սահմանումից, ապացուցել (35-38).

35. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+1}=2$: **36.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n}=0$: **37.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{n^2+1}=1$:

38. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}=0$: **39*.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$: **40.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=0$:

41*. $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, եթե $0<q<1$:

Ապացուցել, որ (a_n) հաջորդականությունը սահման չունի (42-45).

42. $a_n=(-1)^n-\dfrac{1}{n}$: **43.** $a_n=\dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$: **44.** $a_n=\dfrac{n^2+1}{10^6 n+1}$:

45. $a_n = \left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right]$ (այստեղ [ ] -ը ամբողջ մասի նշանն է):

46. Ապացուցել, որ թեորեմ 2-ի հակադարձ պնդումը ճիշտ չէ:

47. Ապացուցել թեորեմ 3-ը:

48. Ճի՞շտ է արդյոք հետևյալ պնդումը. եթե (a_n) և (b_n) հաջորդականությունները տարամետ են, ապա՝ ա) $(a_n + b_n)$ -ը ևս տարամետ է, բ) $(a_n b_n)$ -ը ևս տարամետ է:

49. (a_n) հաջորդականությունը զուգամետ է, իսկ (b_n) հաջորդականությունը՝ տարամետ: Կարո՞ղ է զուգամետ լինել՝ ա) $(a_n + b_n)$ -ը, բ) $(a_n b_n)$ -ը:

50. Դիցուք՝ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, իսկ (b_n) -ը կամայական հաջորդականություն է: Կարելի՞ է պնդել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$: Բերել այդ հավասարությունը՝ ինչպես հաստատող, այնպես էլ հերքող օրինակներ:

51. Դիցուք՝ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$: Այստեղից հետևո՞ւմ է, որ կա՛մ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, կա՛մ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$:

52. Դիցուք՝ (a_n) և (b_n) հաջորդականություններն այնպիսին են, որ ցանկացած n -ի դեպքում $|a_n| \le |b_n|$ և $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$: Ապացուցել, որ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 :$$

53. Դիցուք՝ (a_n), (b_n) և (x_n) հաջորդականություններն այնպիսին են, որ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ և ցանկացած n -ի դեպքում տեղի ունի կրկնակի անհավասարությունը՝ $a_n \le x_n \le b_n$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$:

54. Հաջորդականությունն անվանում են **անվերջ փոքր**, եթե նրա սահմանը հավասար է զրոյի: Օգտվելով սահմանի սահմանումից, ապացուցել, որ`

ա) **երկու անվերջ փոքր հաջորդականությունների գումարն անվերջ փոքր է,**

բ) **անվերջ փոքր հաջորդականության և սահմանափակ հաջորդականության արտադրյալն անվերջ փոքր է,**

գ) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = p$ **հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ** $(a_n - p)$ **հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:**

55. Ապացուցել հաջորդականությունների գումարի, արտադրյալի և քանորդի սահմանների վերաբերյալ թեորեմները` օգտվելով նախորդ խնդրի արդյունքներից:

56*. Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ -ը, ապա գոյություն ունի նաև $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ -ը և հավասար է $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ -ին:

57. Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$:

Գտնել հաջորդականության սահմանը (58-70).

58. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000n}{1000 + n}$:   **59.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - n + 3n^2}{n - n^2}$:   **60.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{2n^3 + 5}$:

61. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + 2n}}$:   **62.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{16n^4 + 3n}}{n^2 + 2}$:   **63.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + (-1)^{n+1}}$:

64. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + 2^n}{3^n}$:   **65.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n + 3^n}{5^n - 3^n}$:   **66.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{21 + 10^n + 11^{n+1}}{1 - 10^{n-1} + 11^n}$:

67. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$:   **68.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)$:

69. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)$: 70. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$:

71. Գտնել $a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{3},\ n\in N$ անդրադարձ առնչությամբ տրված հաջորդականության n-րդ անդամի բանաձևը: Գտնել այդ հաջորդականության սահմանը:

3. Մոնոտոն հաջորդականություններ: Վայերշտրասի թեորեմը Ներդրված հատվածների թեորեմը

1⁰. Սահմանում 1. (a_n) հաջորդականությունն անվանում են **աճող (չնվազող)**, եթե ցանկացած $n\in N$ դեպքում տեղի ունի
$a_{n+1}>a_n$ $(a_{n+1}\geq a_n)$ անհավասարությունը:

Սահմանում 2. (a_n) հաջորդականությունը կոչվում է **նվազող (չաճող)**, եթե ցանկացած $n\in N$ դեպքում տեղի ունի
$a_{n+1}<a_n$ $(a_{n+1}\leq a_n)$ անհավասարությունը:
Բոլոր այդպիսի հաջորդականությունները (աճող, չնվազող, նվազող, չաճող) կոչվում են **մոնոտոն**:

Օ ր ի ն ա կ 1: ***Ապացուցել, որ*** $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ ***ընդհանուր անդամն ունեցող հաջորդականությունը մոնոտոն է:***
Լ ու ծ ու մ: Նկատենք, որ

$$a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

ուստի՝ $a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$:

Քանի որ $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}>\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>0$, հետևաբար, $\dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$,

այսինքն՝ $a_{n+1} < a_n$: Նշանակում է՝ (a_n) հաջորդականությունը նվազող է:

Ամեն մի հաջորդականությունը չէ, որ մոնոտոն է: Մոնոտոն չէ, օրինակ,

$$1; -\frac{1}{2}; \quad \frac{1}{3}; \ldots; \frac{(-1)^n}{n}; \ldots$$

հաջորդականությունը (ինչո՞ւ):

Օ ր ի ն ա կ 2 : ***Ապացուցել, որ*** $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ***բանաձևով տրված հաջորդականությունն աճող է:***

Լուծում: Դիտարկենք դրական անդամներով այդ հաջորդականության $(n+1)$-րդ և n-րդ անդամների հարաբերությունը.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot(n+1)^n} = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} =$$

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}:$$

Ըստ Բեռնուլիի անհավասարության, ցանկացած բնական n-ի համար ունենք՝

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1-\frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}:$$

Այսպիսով, ցանկացած $n \in N$ դեպքում

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = 1,$$

այսինքն՝ $x_{n+1} > x_n$: Նշանակում է՝ տրված հաջորդականությունն աճող է:

Օ ր ի ն ա կ 3: ***Ապացուցենք, որ*** (x_n) ***հաջորդականությունն աճող է.***

$$x_1 = 0; \quad x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}, \quad n \in N:$$

Լ ու ծ ու մ: Ապացուցումը տանենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: Քանի որ $x_2 = \sqrt{6 + x_1} = \sqrt{6} > 0 = x_1$, ուստի պնդումը ճիշտ է $n = 1$ դեպքում: Ենթադրենք, թե $x_{k+1} > x_k$ $(k \in N)$: Ապացուցենք, որ այդ ենթադրությամբ $x_{k+2} > x_{k+1}$:

Նկատելով, որ ցանկացած $n \in N$ դեպքում $x_{n+1} > 0$, կարող ենք գրել՝

$$x_{k+2}^2 = 6 + x_{k+1} \text{ և } x_{k+1}^2 = 6 + x_k,$$

հետևաբար, $x_{k+2}^2 - x_{k+1}^2 = x_{k+1} - x_k > 0$, ուստի $x_{k+2}^2 > x_{k+1}^2$, որտեղից՝ $x_{k+2} > x_{k+1}$: Նշանակում է, որ ցանկացած $n \in N$ դեպքում $x_{n+1} > x_n$, այսինքն՝ (x_n) հաջորդականությունն աճող է:

2⁰. Մոնոտոն և սահմանափակ հաջորդականությունների վերաբերյալ տեղի ունի Վ ա յ ե ր շ տ ր ա ս ի թ ե ո ր ե մ ը: **Եթե հաջորդականությունը մոնոտոն է և սահմանափակ, ապա այն ունի սահման:**
Մաթեմատիկական անալիզում այս կարևոր թեորեմը բավարար պայմաններ է տալիս հաջորդականության սահմանի գոյության համար: Ապացուցենք թեորեմը՝ հիմնվելով, այսպես կոչված, ներդրված միջակայքերի աքսիոմի վրա:
Դիցուք, տրված է ներդրված հատվածների հաջորդականություն՝

$$[a_0; b_0] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset ... \supset [a_n; b_n] \supset ...,$$

որոնցից յուրաքանչյուրի երկարությունը, սկսած երկրորդից, 10 անգամ փոքր է նախորդի երկարությունից: Այդ դեպքում գոյություն ունի այդ բոլոր հատվածներին պատկանող միակ թիվ:
Անցնենք թեորեմի ապացուցմանը:

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Դիցուք՝ (x_n)-ը աճող (չնվազող) և վերևից սահմանափակ հաջորդականություն է: Այդ դեպքում գոյություն ունեն այնպիսի a_0 և b_0 թվեր, որ բոլոր n-երի դեպքում $a_0 \le x_n \le b_0$: $[a_0; b_0]$ հատվածը բաժանենք 10 հավասար մասերի: Ստացված հատվածներից կարելի է ընտրել այնպիսին (նշանակենք այն $[a_1;\ b_1]$-ով), որ ինչ-որ տեղից սկսած, բոլոր բնական n - թվերի համար տեղի ունենա $a_1 \le x_n \le b_1$ անհավասարությունը: Այնուհետև, նորից հատվածը բաժանենք 10 հավասար մասերի և ընտրենք այնպիսի $[a_2;\ b_2]$ մաս, որ ինչ-որ տեղից սկսած, բոլոր բնական n -երի համար ճիշտ լինի $a_2 \le x_n \le b_2$ անհավասարությունը, և այդպես շարունակ: Կստանանք ներդրված հատվածների հաջորդականություն՝

$$[a_0;\ b_0] \supset [a_1;\ b_1] \supset [a_2;\ b_2] \supset \ldots :$$

13-րդ աքսիոմի համաձայն գոյություն ունի միակ c թիվ, որը պատկանում է բոլոր այդ հատվածներին: Ցույց տանք, որ c -ն (x_n) հաջորդականության սահմանն է: Վերևում արված դատողությունների շնորհիվ, ցանկացած k բնական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_k բնական թիվ, որ $n \ge n_k$ պայմանին բավարարող բոլոր n-երի դեպքում՝ $a_k \le x_n \le b_k$: Մյուս կողմից ունենք՝ $a_k \le c \le b_k$ $(\forall_k \in N)$: Հետևաբար, կարող ենք գրել՝

$$|x_n - c| \le |a_k - b_k| = \frac{b_0 - a_0}{10^k} = \frac{d}{10^k},$$

որտեղ d -ն սկզբնական՝ $[a_0;\ b_0]$ հատվածի երկարությունն է: Դժվար չէ հասկանալ, որ յուրաքանչյուր k-ի համար միշտ կարելի է ընտրել այնպիսի n_k, որ $n_k \ge k$, հետևաբար, $n \ge n_k$ պայմանով կստանանք՝ $n \ge k$: Իսկ դա նշանակում է՝ եթե $k \to \infty$, ապա, առավել ևս, $n \to \infty$: Այդ դեպքում, պարզ է, որ $\frac{d}{10^k} \to 0$, ուստի նաև՝ $|x_n - c| \to 0$, այսինքն՝ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$:

Համանմանորեն կարելի է ապացուցել թեորեմը նաև այն դեպքում, երբ (x_n) հաջորդականությունը նվազող (չաճող) է:

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն : Ակնհայտ է, որ ամեն մի աճող հաջորդականություն սահմանափակ է ներքևից (օրինակ, իր առաջին անդամով), իսկ յուրաքանչյուր նվազող հաջորդականություն սահմանափակ է վերևից (օրինակ, իր առաջին անդամով): Հետևաբար, համաձայն Վայերշտրասի թեորեմի, աճող (նվազող) հաջորդականության սահմանի գոյությունը հաստատելու համար բավական է ցույց տալ, որ այն սահմանափակ է վերևից (համապատասխանորեն, ներքևից):

Օ ր ի ն ա կ 4: ***Դիցուք՝*** a ***-ն դրական իրական թիվ է և*** (a_n) ***-ը նրա պակասորդով տասնորդական մոտավորությունների հաջորդականությունն է: Ապացուցենք, որ*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ***:***

Լուծում: (a_n) հաջորդականությունը մոնոտոն (չնվազող) է, քանի որ ցանկացած n -ի համար $a_n \le a_{n+1}$: Մյուս կողմից, այդ հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից (օրինակ, հենց a թվով): Նշանակում է՝ գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ -ը (համաձայն Վայերշտրասի թեորեմի): Քանի որ ցանկացած բնական n -ի համար

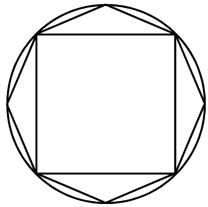
$|a_n - a| = a - a_n \le \dfrac{1}{10^n}$, ուստի $\lim\limits_{n\to\infty}(a - a_n) = 0$, որտեղից՝ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$:

Օ ր ի ն ա կ 5: ***Ապացուցենք, որ*** $0 < q < 1$ ***դեպքում*** $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ ***:***

Լուծում: Քանի որ $0 < q < 1$*, ապա* $q^{n+1} = q \cdot q^n < q^n$*, ուստի* (q^n) *հաջորդականությունը նվազող է: Մյուս կողմից ունենք՝* $0 < q^n < 1$*, ուստի այդ հաջորդականությունը նաև սահմանափակ է: Նշանակում է՝ այն ունի սահման: Նշանակենք՝* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = a$ *: Այդ դեպքում նաև* $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = a$ *(ինչո՞ւ): Ունենք՝* $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(q \cdot q^n) = q \lim\limits_{n\to\infty} q^n = qa$*, հետևաբար* $a = aq$ *: Քանի որ* $q \ne 1$*, ուստի* $a = 0$ *:*

Օ ր ի ն ա կ 6: ***Դիցուք՝*** S_n ***-ը*** r ***շառավղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր*** 2^{n+1} ***-անկյուն բազմանկյան մակերեսն է: Ապացուցենք, որ*** (S_n) ***հաջորդականությունը զուգամետ է:***

Լուծում: Ակնհայտ է, որ կրկնապատկվելով բազմանկյան կողմերի թիվը, նրա մակերեսը մեծանում է (ավելանում են 2^{n+1} հատ եռանկյուններ) (նկ. 2), այսինքն՝ $S_{n+1} > S_n$ (ցանկացած $n \in N$ դեպքում): Նշանակում է՝ (S_n)-ը աճող հաջորդականություն է: Մյուս կողմից, այդ հաջորդականության բոլոր անդամները չեն գերազանցում $4r^2$ թիվը (նույն շրջանագծին արտագծած քառակուսու մակերեսը), նշանակում է՝ (S_n) հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից: Հետևաբար, համաձայն Վայերշտրասի թեորեմի, (S_n) հաջորդականությունը զուգամետ է: Այդ սահմանը հավասար է շրջանի մակերեսին:



Ակ. 2

Օ ր ի ն ա կ 7: ***Ապացուցենք, որ*** (x_n) ***հաջորդականությունը, որտեղ*** $x_1 = 0,\ x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n},\ n \in N$ ***, ունի սահման: Գտնել այդ սահմանը:***

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Օրինակ 3-ում ցույց է տրվել, որ այդ հաջորդականությունը աճող է: Ապացուցենք, որ այն սահմանափակ է: Ակներև է, որ ցանկացած $n \in N$ համար $x_n \geq 0$ և $x_n^2 < x_{n+1}^2 = 6 + x_n$, այսինքն՝ $x_n^2 - x_n - 6 < 0$, որտեղից՝ $x_n < 3$: Այսպիսով, (x_n)-ը աճող և սահմանափակ հաջորդականություն է: Համաձայն Վայերշտրասի թեորեմի՝ այն կունենա սահման՝ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$: Նկատենք, որ $c > 0$: $x_{n+1}^2 = 6 + x_n$ հավասարության մեջ անցնելով սահմանի և միաժամանակ հաշվի առնելով, որ $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1} = c$, կստանանք՝ $c^2 = 6 + c$, որտեղից կգտնենք՝ $c = 3$: Նշանակում է՝ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 3$:

Օ ր ի ն ա կ 8: (x_n) ***հաջորդականությունը տրվում է հետևյալ օրենքով՝***

$$x_1 = b, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

որտեղ $a > 0$ ***և*** $b > \sqrt{a}$ ***: Ապացուցենք, որ այն ունի սահման և գտնենք այն:***

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Նախապես ցույց տանք, որ (x_n) հաջորդականությունը սահմանափակ է ներքևից: Ակնհայտ է, որ այդ հաջորդականության բոլոր անդամները դրական են: Կիրառելով երկու թվերի թվաբանական և երկրաչափական միջինների կապը, կունենանք՝

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a} :$$

Հետևաբար, ցանկացած $n \in N$ դեպքում $x_n \geq \sqrt{a}$:

Այժմ ցույց տանք, որ (x_n) -ը մոնոտոն (չաճող) հաջորդականություն է: Ունենք՝

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0 ,$$

քանի որ $x_n \geq \sqrt{a}$: Նշանակում է՝ $x_{n+1} \leq x_n$: Համաձայն Վայերշտրասի թեորեմի (x_n) հաջորդականությունը սահման ունի: Նշանակենք՝

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c \quad (c > 0) \text{, ուստի նաև՝ } \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = c :$$

$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ անդրադարձ առնչությունից անցնելով սահմանի,

կարող ենք գրել՝ $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\right)$, այսինքն՝

$c = \frac{1}{2}\left(c + \frac{a}{c}\right)$, որտեղից կստանանք՝ $c = \sqrt{a}$: Այսպիսով, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$:

Օ ր ի ն ա կ 9: ***Ապացուցենք, որ*** $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ***ընդհանուր անդամն ունեցող հաջորդականությունը զուգամետ է:***

Լուծում: Ցույց տանք, որ այդ հաջորդականությունը բավարարում է Վայերշտրասի թեորեմի պայմաններին: Մենք արդեն ապացուցել ենք, որ (x_n) հաջորդականությունն աճող է (օրինակ 2): Այժմ ապացուցենք, որ (x_n) -ը սահմանափակ է վերևից (ակնհայտորեն, այն ներքևից սահմանափակ է, քանի որ ցանկացած $n \in N$ դեպքում $x_n > 0$):

Նախ ապացուցենք, որ $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ բանաձևով տրված հաջորդա-

կանությունը նվազող է: Ունենք՝

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1}\cdot(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+2}\cdot n^{n+1}} = \left(\frac{(n+1)^2}{(n+2)n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} > \left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1:$$

Այստեղ մենք օգտվեցինք Բեռնուլիի անհավասարությունից:

Այսպիսով, $\frac{y_n}{y_{n+1}} > 1$, հետևաբար՝ $y_n > y_{n+1}$:

Նշանակում է, որ (y_n) հաջորդականությունը նվազող է:

Ստացված արդյունքից երևում է, որ ցանկացած $n \in N$ թվի դեպքում $y_n \le y_1 = 4$,այսինքն՝ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \le 4$, որտեղից՝ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4\cdot\frac{n}{n+1} \le 4$:

Հետևաբար, $x_n < 4$: Վերջին անհավասարությունն էլ ցույց է տալիս, որ (x_n) հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից: Այսպիսով (x_n) հաջորդականությունը մոնոտոն է և սահմանափակ, հետևաբար այն ունի սահման: Ընդունված է այդ սահմանը նշանակել e տառով՝

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e:$$

e -ն իռացիոնալ թիվ է $(e = 2{,}718281828459045...)$. այն կարևոր դեր է տանում մաթեմատիկայում:

3°. Ներդրված հատվածների թեորեմը: Ընդունված է ասել, որ $[c;d]$ հատվածը **պարունակվում է** կամ **ներդրված է** $[a;b]$ հատվածում, եթե առաջին հատվածի բոլոր կետերը պատկանում են երկրորդ հատվածին, կամ, որ նույնն է, եթե՝

$$a \le c \le d \le b:$$

Այդ դեպքում, կարճ գրառում են՝

$$[a;b]\supset[c;d]:$$

Հատվածների

$$[a_1;b_1],\ [a_2;b_2],\dots,\ [a_n;b_n],\dots$$

հաջորդականությունն անվանում են **ներդրված**, եթե նրանցից յուրաքանչյուրը, սկսած երկրորդից, ներդրված է իր նախորդի մեջ, այսինքն՝

$$a_1\le a_2\le\ldots\le a_n\le\ldots\le b_n\le\ldots\le b_2\le b_1$$
$$\left([a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset\ldots\supset[a_n;b_n]\supset\ldots\right):$$

Կարելի է ապացուցել հետևյալ պնդումը.

Թ ե ո ր ե մ : **Դիցուք՝ տրված է ներդրված հատվածների հաջորդականություն՝**

$$[a_1;b_1],\ [a_2;b_2],\ \dots,\ [a_n;b_n],\dots,$$

ընդ որում նրանց երկարությունների (b_n-a_n) **հաջորդականությունը զուգամիտում է զրոյի՝**

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0:$$

Այդ դեպքում հատվածների a_n **և** b_n **ծայրակետերը զուգամիտում են մի ընդհանուր սահմանի՝**

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c\,,$$

որը բոլոր հատվածների համար միակ ընդհանուր կետն է:

Թեորեմի մեջ նշված c կետը, ըստ էության, մոնոտոն (a_n) և (b_n) հաջորդականությունների ընդհանուր սահմանն է:

Ապացուցում: Թեորեմի պայմանից հետևում է, որ (a_n) և (b_n) հաջորդականությունները մոնոտոն են, ընդ որում՝ ցանկացած n-ի դեպքում

$$a_1\le a_n<b_n\le b_1:$$

Նշանակում է՝ (a_n) և (b_n) հաջորդականությունները նաև սահմանափակ են: Հետևաբար, Վայերշտրասի թեորեմի համաձայն այդ երկու հաջորդականություններն էլ ունեն սահման: Դիցուք՝ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c_1$ և $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c_2$: Ցույց տանք, որ $c_1 = c_2$:

Իրոք, $c_2 - c_1 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, հետևաբար, $c_1 = c_2 = c$:

Մյուս կողմից՝ դժվար չէ նկատել, որ ցանկացած n-ի դեպքում $a_n \le c \le b_n$ (հիմնավորեք), որից և հետևում է, որ c կետը պատկանում է թեորեմի պայմանում նշված բոլոր հատվածներին:

Այն ենթադրությամբ, որ c -ից տարբեր c' կետը ևս այդ բոլոր հատվածներին պատկանող կետ է, կարող ենք գրել՝

$$|b_n - a_n| \ge |c - c'| > 0 \quad (\forall n \in N),$$

որն էլ հակասում է թեորեմի այն պայմանին, ըստ որի $(b_n - a_n)$-ը ձգտում է զրոյի: Թեորեմն ապացուցված է:

Հետագայում մենք հաճախ ենք օգտվելու այդ փաստից, որն անվանելու ենք **«ներդրված հատվածների թեորեմ»:**

Օ ր ի ն ա կ 10: *Դիցուք՝ P_n -ը միավոր տրամագծով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր 2^{n+1} -անկյուն բազմանկյան պարագիծն է, իսկ P'_n -ը՝ նույն շրջանագծին արտագծած 2^{n+1} -անկյուն բազմանկյան պարագիծը: Դժվար չէ համոզվել, որ հատվածների*

$$[P_1; P'_1],\ [P_2; P'_2],\ \ldots,\ [P_n; P'_n], \ldots$$

հաջորդականությունը բավարարում է ներդրված հատվածների թեորեմի պայմաններին (հիմնավորեք): Հետևաբար, (P_n) և (P'_n) հաջորդականություններն ունեն ընդհանուր սահման: Այդ սահմանը նշանակվում է π տառով, որը մաթեմատիկայում կարևոր դեր տանող, մեզ արդեն հայտնի «պի» իռացիոնալ թիվն է՝ $\pi = 3{,}141592653\ldots$:

*π թիվն ընդունում են որպես **միավոր տրամագծով շրջանագծի երկարություն:** Այստեղից հետևում է, որ r **շառավղով շրջանագծի երկարությունը հավասար է $2\pi r$ -ի:***

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

72. Արդյո՞ք (x_n) հաջորդականությունը մոնոտոն է (նվազո՞ղ, աճո՞ղ).

ա) $x_n = 3n^2 - n$, բ) $x_n = n^2 - 3n$, գ) $x_n = 7n - n^2$, դ) $x_n = \frac{n^2}{2^n}$:

Ապացուցել հաջորդականության մոնոտոնությունը(73-76).

73. $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$: **74.** $b_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$: **75.** $c_n = \frac{n}{n^2+1}$: **76.** $d_n = \frac{n^4}{16^n}$:

77*. Ապացուցել, որ $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ բանաձևով տրված հաջորդականությունն աճող է:

78. Ինչպիսի՞ $q > 0$ թվերի դեպքում $(n \cdot q^n)$ հաջորդականությունը կլինի նվազող:

79. Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}(n \cdot q^n) = 0$, եթե $|q| < 1$:

80. Ապացուցել, որ (x_n) հաջորդականությունը նվազող է.

$$x_1 = 4, \quad x_{n+1} = \frac{2 + x_n^2}{2x_n}, \quad n \in N:$$

81. Ապացուցել, որ եթե $|q| < 1$, ապա $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$:

82. Դիցուք՝ a-ն դրական իրական թիվ է և (a'_n)-ը նրա հավելորդով տասնորդական մոտավորությունների հաջորդականությունն է: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty} a'_n = a$: Այս խնդրի և օրինակ 4-ի հիման վրա ի՞նչ եզրակացություն կարելի է անել:

Ապացուցել, որ (a_n) հաջորդականությունն ունի սահման (83-87).

83*. $a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$:

84. $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$:

85. $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$:

86. $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n}$:

87.* $x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}$:

Ապացուցել, որ (x_n) հաջորդականությունն ունի սահման և գտնել այն (88-92).

88.* $x_n = \frac{2^n}{n!}$:

89. $x_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = \sqrt{3x_n}, \qquad n \in N$:

90. $x_1 = 13, \quad x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}, \quad n \in N$:

91. $x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}, \qquad n \in N$:

92. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$:

93. Գտնել $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ -ը, եթե $x_1 = \frac{1}{4}$ և $x_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{x_n^2}{2}$:

94*. Գտնել $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, եթե $|x| < 1$ և

$$a_n = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^n}):$$

95*. Գտնել $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ -ը, եթե $u_n = \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \ldots \cdot \frac{n^3-1}{n^3+1}$:

Գտնել սահմանը (96-99).

96. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ ։ **97.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ ։

98. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$ ։ **99.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$ ։

100. Ցույց տալ, որ անվերջ հատվածների հետևյալ համախումբը ներդրված հատվածների հաջորդականություն է.

$$[0;3],\quad \left[\frac{1}{2};2\frac{1}{2}\right],\ldots\ldots\ldots,\left[1-\frac{1}{n};2+\frac{1}{n}\right],\ldots:$$

Կարելի՞ է պնդել, որ այդ բոլոր հատվածներն ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ։

101. Տրված է r շառավղով շրջանագիծ։ Դիցուք՝ S_n-ը այդ շրջանագծին արտագծած կանոնավոր 2^{n+1}-անկյուն բազմանկյան մակերեսն է, իսկ S_n'-ը նույն շրջանագծին արտագծած կանոնավոր 2^{n+1}-անկյուն բազմանկյան մակերեսը։ Ապացուցել, որ (S_n) և (S_n') հաջորդականություններն ունեն ընդհանուր սահման։ Ինչի՞ է հավասար այդ սահմանը։

§ 2. ՊՐՈԳՐԵՍԻԱՆԵՐ ԵՎ ԳՈՒՄԱՐՆԵՐ

Նախապես վերհիշենք պրոգրեսիաների սահմանումները և նրանց հիմնական հատկությունները:

1⁰. (a_n) հաջորդականությունը, որում $a_1 = a$ և ցանկացած բնական n-ի դեպքում

$$a_{n+1} = a_n + d, \qquad (1)$$

որտեղ a-ն և d-ն տրված թվեր են, կոչվում է **թվաբանական պրոգրեսիա:**

d թիվը կոչվում է թվաբանական պրոգրեսիայի **տարբերություն:**

Թվաբանական պրոգրեսիան մոնոտոն հաջորդականություն է. $d > 0$ դեպքում աճող է (քանի որ $a_{n+1} - a_n = d > 0$), $d < 0$ դեպքում՝ նվազող (քանի որ $a_{n+1} - a_n = d < 0$), չաճող (չնվազող) է, երբ $d = 0$:

Թվաբանական պրոգրեսիայի n-րդ անդամը որոշվում է

$$a_n = a_1 + d(n-1) \qquad (2)$$

բանաձևով:

(2) բանաձևից հետևում է, որ եթե թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը զրո չէ, ապա այդ պրոգրեսիան անսահմանափակ հաջորդականություն է: Ավելի հաճախ դիտարկվում են վերջավոր քանակով անդամներով թվաբանական պրոգրեսիաներ (**վերջավոր պրոգրեսիաներ**):

Նշենք թվաբանական պրոգրեսիայի հիմնական հատկությունները:

1) **Թվաբանական պրոգրեսիայի յուրաքանչյուր անդամը՝ սկսած երկրորդից, հավասար է իր հարևան (նախորդ և հաջորդ) անդամների թվաբանական միջինին,** այսինքն՝

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad (k \ge 2): \qquad (3)$$

2) $a_1; a_2; \ldots; a_n$ **վերջավոր թվաբանական պրոգրեսիայի ծայրերից հավասարահեռ անդամների գումարը հավասար է ծայրանդամների գումարին,** այսինքն՝

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n \quad (k = 1, 2, \ldots, n): \qquad (4)$$

3) **Վերջավոր թվաբանական պրոգրեսիայի բոլոր անդամների գումարը հավասար է նրա ծայրանդամների կիսագումարի և անդամների թվի արտադրյալին,** այսինքն՝ եթե $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S_n$, ապա

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n : \qquad (5)$$

2⁰. (b_n) հաջորդականությունը, որում $b_1 = b$ և ցանկացած բնական n-ի դեպքում

$$b_{n+1} = b_n q ,$$

որտեղ b-ն և q-ն զրոյից տարբեր տրված թվեր են, կոչվում է **երկրաչափական պրոգրեսիա**: q թիվը կոչվում է երկրաչափական պրոգրեսիայի **հայտարար:**

Եթե $b > 0$ և $q > 1$, ապա երկրաչափական պրոգրեսիան աճող հաջորդականություն է, քանի որ ցանկացած n-ի համար $b_{n+1}/b_n = q > 1$, այսինքն՝ $b_{n+1} > b_n$, իսկ եթե $b > 0$ և $0 < q < 1$, ապա երկրաչափական պրոգրեսիան նվազող է $(b_{n+1} = b_n q < b_n)$:

$b < 0$ դեպքում, ընդհակառակը, երկրաչափական պրոգրեսիան նվազող է, եթե $q > 1$ և աճող՝ եթե $0 < q < 1$:

$q < 0$ դեպքում պրոգրեսիայի յուրաքանչյուր անդամի և նրա հաջորդ անդամի նշանները միմյանց հակադիր են, այդ պատճառով էլ այն չի կարող լինել մոնոտոն:

Երկրաչափական պրոգրեսիայի n**-րդ անդամն** ունի

$$b_n = b_1 q^{n-1} \qquad (6)$$

տեսքը:

Վերջավոր թվով անդամներ ունեցող երկրաչափական պրոգրեսիան անվանում են **վերջավոր** երկրաչափական պրոգրեսիա:

Նշենք երկրաչափական պրոգրեսիայի հիմնական հատկությունները:

1) **Երկրաչափական պրոգրեսիայի յուրաքանչյուր անդամի քառակուսին, սկսած երկրորդից, հավասար է իր հարևանների արտադրյալին,** այսինքն՝

$$b_k^2 = b_{k-1} b_{k+1} \quad (k \ge 2) : \qquad (7)$$

2) Եթե երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամները դրական են, ապա այդ հատկությունը կարելի է ձևակերպել այսպես. երկրաչափական պրոգրեսիայի յուրաքանչյուր անդամը, սկսած երկրորդից, հավասար է իր հարևանների երկրաչափական միջինին, այսինքն՝

$$b_k = \sqrt{b_{k-1}b_{k+1}} \; : \qquad (7')$$

2) $b_1, b_2, \ldots, b_n$ **վերջավոր երկրաչափական պրոգրեսիայում ծայրերից հավասարահեռ անդամների արտադրյալը հավասար է ծայրանդամների արտադրյալին**, այսինքն՝

$$b_k b_{n-k+1} = b_1 b_n \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (8)$$

3) **Եթե երկրաչափական պրոգրեսիայի** q **քանորդը հավասար չէ 1-ի և**

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = S_n ,$$

ապա

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} : \qquad (9)$$

Դիցուք՝ երկրաչափական պրոգրեսիայի հայտարարը բավարարում է $|q| < 1$ պայմանին: Այդ դեպքում **գոյություն ունի նրա առաջին** n **անդամների գումարի՝** (S_n) **հաջորդականության սահմանը:** (9) բանաձևից ունենք՝

$$S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} q^n :$$

Քանի որ $q^n \to 0$, երբ $n \to \infty$, հետևաբար $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b_1}{1-q}$:

Այդ սահմանը կոչվում է **անվերջ երկրաչափական պրոգրեսիայի գումար:** Այն, սովորաբար, նշանակվում է S-ով.

$$S = \frac{b_1}{1-q} \quad (|q| < 1) : \qquad (10)$$

Ստացված արդյունքը գրառվում է նաև այսպես՝

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} + \ldots = \frac{b_1}{1-q} : \qquad (11)$$

Դիտողություն: Եթե գոյություն ունի (S_n) հաջորդականության սահմանը, որտեղ $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, ապա այն անվանում են $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ անվերջ գումարի արժեք և գրառում են այսպես՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = S, \quad \text{որտեղ } S = \lim_{n\to\infty} S_n :$$

Օ ր ի ն ա կ 1 : ***Գտնենք հետևյալ գումարը*** ՝

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots :$$

Լ ու ծ ու մ: Որոնելի գումարը $b_1 = 1$ առաջին անդամ և $q = \frac{1}{2}$ հայտարար ունեցող անվերջ երկրաչափական պրոգրեսիայի գումար է: (11) բանաձևի համաձայն կարող ենք գրել՝

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 :$$

Օրինակ2: ***Պարբերական կոտորակը դարձնենք սովորական կոտորակ*** ՝

ա) $0,(7)$; բ) $1,4(23)$:

Լ ու ծ ու մ: ա) Ունենք՝

$$0,(7) = 0,777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \ldots :$$

Վերջին արտահայտությունը $b_1 = \frac{7}{10}$ առաջին անդամով և $q = \frac{1}{10}$ հայտարարով անվերջ երկրաչափական պրոգրեսիայի գումար է, որը (10) բանաձևի շնորհիվ հավասար է՝

$$\frac{b_1}{1 - q} = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9} :$$

Այսպիսով, $0,(7) = \frac{7}{9}$:

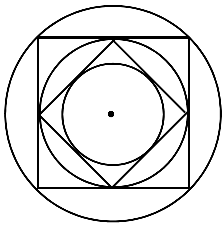
բ) $1{,}4(23)=1{,}4+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\frac{23}{10000000}+\ldots=1{,}4+\frac{\frac{23}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=$

$$=\frac{14}{10}+\frac{23}{990}=\frac{14\cdot 99+23}{990}=\frac{14\cdot 100+23-14}{990}=\frac{1423-14}{990}:$$

(ուշադրություն դարձրեք ստացված օրինաչափության վրա):

Այսպիսով, $1{,}4(23)=\frac{1409}{990}$:

Օ ր ի ն ա կ 3: r ***շառավղով շրջանագծին ներգծած է քառակուսի, այդ քառակուսուն ներգծված է շրջանագիծ, շրջանագծին՝ քառակուսի և այդպես շարունակ: Գտնել ստացված բոլոր քառակուսիների պարագծերի գումարը:***



Նկ. 3

Լուծում: Դժվար չէ հասկանալ, որ առաջին քառակուսու կողմի երկարությունը $r\sqrt{2}$ է, իսկ երկրորդ քառակուսու կողմի երկարությունը՝ r (նկ. 3): Նշանակում է՝ յուրաքանչյուր քառակուսու կողմի երկարությունը հավասար է իր նախորդ քառակուսու կողմի երկարությունը՝ բաժանած $\sqrt{2}$-ի (բազմապատկած $\frac{1}{\sqrt{2}}$-ով): Հետևաբար, քառակուսիների կողմերի երկարությունները, ուստի և նրանց պարագծերը կազմում են անվերջ երկրաչափական պրոգրեսիա, որի հայտարարը՝ $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$: Քանի որ առաջին քառակուսու պարագիծը $4\sqrt{2}\,r$ է, ուստի, օգտվելով անվերջ երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևից, կարող ենք գրել՝

$$4\sqrt{2}\,r+4r+2\sqrt{2}\,r+\ldots=\frac{4\sqrt{2}\,r}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=8(\sqrt{2}+1)r:$$

3°. Գումարների հաշվում: Վերջավոր պրոգրեսիաների անդամների գումարների բանաձևերը հնարավորություն են տալիս արագ գումարել մեծ թվով գումարելիներ: Բացի այդ, հաճախ հանդիպում են այնպիսի գումարներ, որոնք որոշ ձևափոխություններից հետո հանգեցվում են պրոգրեսիաների գումարների բանաձևերը կիրառելուն: Այստեղ մենք դիտարկելու ենք այդպիսի օրինակներ:

Շատ գումարելիներ ունեցող գումարների համար հաճախ գործածում են սեղմ գրելաձև՝ «Σ» (հունական այբուբենի «սիգմա» գլխատառը) նշանի միջոցով: Օրինակ,

$$\sum_{k=1}^{n} aq^{k-1}$$

գրառումն իրենից ներկայացնում է երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$$

հակիրճ գրելաձևը: Ընդհանրապես, $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ գրառումը նշանակում է՝ $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ հաջորդականության այն անդամների գումարը, որոնց համարներն ընկած են 1-ի և n-ի միջև (ներառյալ u_1-ը և u_n-ը), այսինքն՝

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n :$$

Համանման իմաստ ունի $\sum\limits_{k=m}^{n} u_k$ պայմանանշանը. դա նույն հաջորդականության բոլոր այն անդամների գումարն է, որոնց համարները սահմանափակված են m-ի և n-ի միջև (ներառյալ a_m-ը և a_n-ը): Օրինակ,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \ldots + \frac{n}{n^2+1}, \quad \sum_{k=3}^{n} \sqrt[k]{k} = \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \ldots + \sqrt[n]{n} :$$

Գտնենք հետևյալ գումարները.

ա) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2$,

բ) $1+11+111+\ldots+\overbrace{111\ldots11}^{n}$,

գ) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$,

դ) $1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n$:

Լուծում: ա) Ունենք՝

$$S=1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2=$$

$$=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+\ldots+(99-100)(99+100)$$

$$=-(3+7+\ldots+199):$$

Վերջին փակագծում եղած արտահայտությունը ներկայացնում է թվաբանական պրոգրեսիայի գումար, որի առաջին անդամը 3 է, տարբերությունը՝ 4, իսկ վերջին անդամը՝ 199: Գումարելիների քանակը նշանակելով n -ով, կստանանք՝

$$199=3+4(\mathrm{n}-1),\ \text{որտեղից՝}\ \mathrm{n}=50:$$

Այսպիսով, $\mathrm{S}=-\dfrac{3+199}{2}\cdot 50=-5050:$

բ) Նկատենք, որ

$$\overbrace{111\ldots11}^{\mathrm{k}}=\frac{10^{\mathrm{k}}-1}{9}:$$

Այդ դեպքում կարող ենք գրել՝

$$1+11+111+\ldots+\overbrace{111\ldots11}^{\mathrm{n}}=\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\frac{10^3-1}{9}+\ldots+\frac{10^{\mathrm{n}}-1}{9}=$$

$$=\frac{1}{9}\left((10+10^2+10^3+\ldots+10^{\mathrm{n}})-\mathrm{n}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{10(10^{\mathrm{n}}-1)}{9}-\mathrm{n}\right)=\frac{10^{\mathrm{n}+1}-9\mathrm{n}-10}{81}:$$

գ) Դիտարկենք հետևյալ նույնությունը՝ $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$: Տեղադրելով այդ նույնության մեջ $k=1,2,\ldots,n$ և ապա անդամ առ անդամ գումարելով ստացված n հավասարությունները, կստանանք՝

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n: \qquad (1)$$

Քանի որ $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ (առաջին բնական թվերի գումարը՝ որպես թվաբանական պրոգրեսիայի գումար) և $\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)$

$=(2^3-1^3)+(3^3-2^3)+\ldots+(n^3-(n-1)^3)+((n+1)^3-n^3)=(n+1)^3-1$, ուստի (1) հավասարությունը բերվում է հետևյալ տեսքի՝

$$(n+1)^3-1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{3}{2}n(n+1)+n,$$

որտեղից՝ $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$:

Այսպիսով, $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

դ) Նշանակենք որոնելի գումարը $Q(x)$ -ով:

Երբ $x=1$, կստանանք՝

$$Q(1)=1+2+3+\ldots+(n+1)=\frac{1+(n+1)}{2}(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}:$$

Դիցուք՝ $x\neq 1$: Ունենք՝

$$Q(x)-xQ(x)=(1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+(n+1)x^n)-$$

$$-(x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n+(n+1)x^{n+1})=$$

$$=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n-(n+1)x^{n+1}=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}-(n+1)x^{n+1},$$

որտեղից՝

$$Q(x)=\frac{(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+1}{(x-1)^2}:$$

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. Ապացուցել (2), (5), (6) և (9) բանաձևերը՝ ելնելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից:

2. Ապացուցել (3), (4), (7), (7') և (8) հավասարությունները:

3. Թվաբանական պրոգրեսիայի երրորդ և իններորդ անդամների գումարը հավասար է 8-ի: Գտնել պրոգրեսիայի առաջին 11 անդամների գումարը:

4. Հայտնի է, որ ցանկացած n-ի դեպքում մի որոշ թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների S_n գումարն արտահայտվում է $S_n = 4n^2 - 3n$ բանաձևով: Գտնել այդ պրոգրեսիայի առաջին երեք անդամները:

5. Գտնել 3-ի բաժանվող բոլոր զույգ եռանիշ թվերի գումարը:

6. $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ թվերը կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա: Ապացուցել, որ

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \dots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}:$$

7. Հայտնի է, որ թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարը հավասար է այդ պրոգրեսիայի առաջին m անդամների գումարին, այսինքն՝ $S_n = S_m$ $(n \neq m)$: Գտնել S_{n+m}-ը:

8. Ապացուցել, որ եթե $a_1, a_2, \dots, a_n$ դրական թվերը կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա, ապա

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}:$$

9. Դիցուք՝ S_n-ը թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարն է: Ապացուցել, որ $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$:

10. Գտնել երկրաչափական պրոգրեսիա կազմող երեք թվեր, եթե հայտնի է, որ նրանց արտադրյալը հավասար է 64-ի, իսկ թվաբանական միջինը՝ $14/3$-ի:

11. Դիցուք $b_1, b_2, ..., b_n$-ը երկրաչափական պրոգրեսիա է, իսկ S_n-ը նրա առաջին n անդամների գումարը: Ապացուցել, որ

$$S_n = b_1 b_n \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_n} \right):$$

12. Դիցուք՝ S_n-ը երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարն է: Ապացուցել, որ

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2:$$

13. Ապացուցել, որ զրոյից տարբեր անդամներով (b_n) հաջորդականությունը երկրաչափական պրոգրեսիա է այն և միայն այն դեպքում, երբ յուրաքանչյուր $n \geq 3$ դեպքում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n-1}^2)(b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2) = (b_1 b_2 + b_2 b_3 + \ldots + b_{n-1} b_n)^2:$$

14. Երեք թվեր, որոնցից երրորդը հավասար է 12-ի, կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա: Եթե 12-ի փոխարեն վերցնենք 9, ապա այդ երեք թվերը կկազմեն թվաբանական պրոգրեսիա: Գտնել այդ թվերը:

15. x, y, z թվերը կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա (նշված կարգով), իսկ $x+y$, $y+z$, $z+x$ թվերը՝ թվաբանական պրոգրեսիա: Գտնել երկրաչափական պրոգրեսիայի հայտարարը:

16*. Կենտ բնական թվերի հաջորդականությունը տրոհված է խմբերի այնպես, որ n-րդ խումբը պարունակում է n թիվ.

$$(1), \ (3, 5), \ (7, 9, 11), \ (13, 15, 17, 19), \ldots:$$

Ապացուցել, որ n-րդ խմբի թվերի գումարը հավասար է n^3:

17*. Բնական թվերի հաջորդականությունից կազմված են խմբեր, այնպես, որ յուրաքանչյուր խումբը վերջանում է խմբի համարի քառակուսիով.

$$(1), \quad (2, 3, 4), \quad (5, 6, 7, 8, 9), \ldots :$$

Ապացուցել, որ n -րդ խմբի թվերի գումարը հավասար է

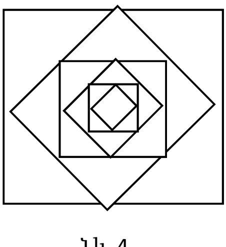
$$2n^3 - 3n^2 + 3n - 1 :$$

18*. 1; 4; 10; 19; … հաջորդականությունն օժտված է այն հատկությամբ, որ հարևան անդամների (հաջորդի և նախորդի) տարբերությունները կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա՝ 3, 6, 9,…: Գտնել այդ հաջորդականության n -րդ անդամը և առաջին n անդամների գումարը:

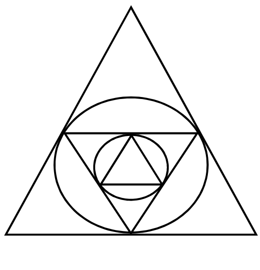
19*. Տրված է a կողմով քառակուսի: Նրա կողմերի միջնակետերը հաջորդաբար միացված են հատվածներով: Ստացված քառակուսու հետ արված է նույնը և այդպես անվերջ (նկ. 4): Գտնել ստացված բոլոր քառակուսիների մակերեսների գումարը:

20*. a կողմով կանոնավոր եռանկյանը ներգծված է շրջանագիծ, վերջինիս ներգծված է կանոնավոր եռանկյուն, այդ եռանկյանը դարձյալ ներգծված է շրջանագիծ և այդպես անվերջ (նկ. 5): Գտնել՝

ա) բոլոր եռանկյունների պարագծերի գումարը,



Նկ. 4



Նկ. 5

բ) բոլոր եռանկյունների մակերեսների գումարը,

գ) բոլոր շրջանագծերի երկարությունների գումարը,

դ) բոլոր շրջանների մակերեսների գումարը:

Լուծել հավասարումը (21-24).

21. $\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ldots+\frac{1}{x}=3 \quad (x\in N)$:

22. $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=3{,}4-0{,}6x$, որտեղ $|x|<1,\ x\neq 0$:

23. $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots=\frac{13}{6}$, որտեղ $|x|<1,\ x\neq 0$:

24. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}=2$ (ձախ մասը $\sqrt{x}$, $\sqrt{x\sqrt{x}}$, $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$,… հաջորդականության սահմանն է):

25. Գոյություն ունի՞ արդյոք անվերջ երկրաչափական պրոգրեսիա, որի առաջին 1000 անդամները լինեն ամբողջ թվեր, իսկ մնացած անդամները՝ կոտորակային:

26. Անվերջ երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը հավասար է 16-ի, իսկ նրա անդամների քառակուսիների գումարը՝ 153,6-ի: Գտնել պրոգրեսիայի չորրորդ անդամն ու հայտարարը:

27. Գտնել անվերջ երկրաչափական պրոգրեսիայի հայտարարը, եթե այդ պրոգրեսիայի յուրաքանչյուր անդամը չորս անգամ մեծ է իրեն հաջորդող բոլոր անդամների գումարից:

Գտնել սահմանը (28-31).

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$:

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}$:

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\right)$:

31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{4}+\frac{13}{16}+\ldots+\frac{2^n+3^n}{4^n}\right)$:

Հաշվել գումարը (32-34) .

32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$:

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$:

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{100}{101}\right)^{n}$:

35. Օգտվելով անվերջ երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևից, պարբերական կոտորակը դարձնել սովորական կոտորակ.

ա) $0,(6)$; բ) $0,(17)$; գ) $3,2(7)$; դ) $0,125(37)$:

36*. Արտածել և ձևակերպել ընդհանուր կանոն, ըստ որի տասնորդական պարբերական կոտորակը ներկայացվում է սովորական կոտորակի տեսքով:

Գտնել գումարը (37-45).

37. $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(2n-1)^2-(2n)^2$:

38. $7+77+777+\ldots+\overbrace{77\ldots77}^{n}$:

39. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)$:

40. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2$:

41. $1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\ldots+n(2n+1)$:

42. $\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$:

43. $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+n\cdot n!$:

44. $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$:

45*. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}$:

46*. $1+2\cdot3+3\cdot7+\ldots+n(2^n-1)$:

47*. $5+45+325+\ldots+(4n+1)\cdot5^{n-1}$:

48*. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2)$:

49. $2+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}+\frac{41}{8}+\ldots+\frac{3^n+1}{2^n}$:

50. Օգտվելով $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ նույնությունից, գտնել $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ գումարը:

51*. Գտնել $1, 2, 3, \ldots, n$ թվերի բոլոր հնարավոր զույգերի արտադրյալների գումարը:

52*. $1+\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}+\frac{4}{a^3}+\ldots+\frac{n}{a^{n-1}}$:

53*. $nx+(n-1)x^2+(n-2)x^3+\ldots+2x^{n-1}+x^n$:

54*. $\frac{1}{a+1}+\frac{2}{a^2+1}+\frac{4}{a^4+1}+\ldots+\frac{2^n}{a^{2^n}+1}$:

55*. $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{4}{17}+\ldots+\frac{2^{99}}{2^{2^{99}}+1}$:

57*. (a_n) հաջորդականությունը որոշվում է հետևյալ օրենքով. $a_1=3$, $a_2=6$ և յուրաքանչյուր անդամ սկսած երրորդից, նախորդ անդամների միջին թվաբանականն է: Գտնել.

ա) a_7, բ) a_n $(n\geq 3)$:

§ 3. ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄ՝ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՄԱՄԲ

Սովորական ձևափոխությունների կամ փոփոխականի փոխարինման օգնությամբ միշտ չէ, որ $f(x)=g(x)$ $(f(x)>g(x))$ տեսքի հավասարումը (անհավասարումը) հնարավոր է հանգեցնել այնպիսի ստանդարտ հավասարման (անհավասարման), որի համար գոյություն ունենան լուծման որոշակի ալգորիթմներ (կանոններ)։ Նպատակին հասնելու համար նման դեպքերում երբեմն կիրառվում են բացարձակապես այլ մոտեցումներ։ Օրինակ, իբրև հուսալի և արդյունավետ միջոց, առանձնահատուկ դեր ունի ֆունկցիաների հատկությունների կիրառումը։

Սկզբում բերենք այնպիսի օրինակներ, որոնք լուծվում են ֆունկցիայի մոնոտոնության հատկության հիման վրա։ Սկսենք $f(x)=b$ տեսքի հավասարումներից, որտեղ f-ը մոնոտոն ֆունկցիա է։

Հիշեցնենք, որ f ֆունկցիան կոչվում է ***աճող (նվազող)*** *X բազմության վրա, եթե այդ բազմությանը պատկանող ցանկացած x_1 և x_2-ի համար, եթե $x_1<x_2$ ապա*

$$f(x_1)<f(x_2)\ (f(x_1)>f(x_2))\text{։}$$

Սովորողներին խորհուրդ է տրվում կրկնել ֆունկցիաների մոնոտոնության հիմնական հատկությունները։

Օ ր ի ն ա կ 1: ***Լուծենք հետևյալ հավասարումը՝***

$$x^5+x^3+x=42\text{ :}\qquad (1)$$

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Հավասարման ձախ մասն իրական թվերի R բազմության վրա աճող ֆունկցիա է (որպես աճող ֆունկցիաների գումար)։ Դժվար չէ նկատել, որ $x=2$-ը այդ հավասարման արմատ է։ Քանի որ մոնոտոն ֆունկցիան իր արժեքների բազմության ամեն մի արժեքն ընդունում է անկախ փոփոխականի միայն մեկ արժեքի դեպքում, ուստի նկատված արմատը միակն է։

*Հիշենք այդ պնդումը՝ եթե f **ֆունկցիան մոնոտոն է X միջակայքի վրա, իսկ b թիվն այդ միջակայքի վրա f-ի ընդունելիք արժեքներից որևէ մեկն է, ապա $f(x)=b$ հավասարումն X միջակայքում ունի միակ արմատ (թեորեմ արմատի մասին):***

(1) հավասարումը լուծենք նաև ստանդարտ (սովորական) եղանակով: Հավասարման աջ մասից 42-ը տեղափոխենք ձախ մասը: Խմբավորման եղանակով ձախ մասում ստացված բազմանդամը վերածենք բազմապատկիչների (այդ կարելի է անել՝ այն բաժանելով $(x-2)$-ի վրա՝ նախապես նկատելով $x=2$ արմատը).

$$\left(x^5-32\right)+\left(x^3-8\right)+(x-2)=0,$$

$$(x-2)\left(x^4+2x^3+4x^2+8x+16\right)+(x-2)\left(x^2+2x+4\right)+(x-2)=0,$$

$$(x-2)\left(x^4+2x^3+5x^2+10x+21\right)=0,$$

որտեղից՝ $x=2$ կամ $x^4+2x^3+5x^2+10x+21=0$:

Ցույց տանք, որ վերջին հավասարումն արմատ չունի: Այն ձևափոխենք այսպես՝

$$\left(x^4+2x^3+x^2\right)+\left(4x^2+10x+21\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2+x\right)^2+4\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{59}{4}=0:$$

Ակնհայտ է, որ ցանկացած x-ի դեպքում վերջին հավասարման ձախ մասը դրական է, նշանակում է՝ այն չի կարող ունենալ արմատ: Համեմատելով (1) հավասարման լուծման վերևում ներկայացված երկու եղանակները, հասկանալի է դառնում առաջին եղանակի առավելությունը:

Օ ր ի ն ա կ 2: ***Լուծենք հետևյալ հավասարումը՝***

$$\sqrt[4]{13-x}-\sqrt[4]{x+4}=1: \qquad (2)$$

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Դիտարկենք

$$f(x)=\sqrt[4]{13-x}-\sqrt[4]{x+4}$$

ֆունկցիան: Այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է՝ $X=[-4;\ 13]$: f-ը X միջակայքի վրա նվազող է (համոզվեք դրանում՝ օգտվելով ֆունկցիայի մոնոտոնության սահմանումից): Այնուհետև, նկատենք, որ $f(-3)=1$: Այդ նշանակում է, որ $x=-3$-ը (2) հավասարման արմատ է: Այն միակն է՝ ըստ արմատի վերաբերյալ թեորեմի: Եթե փորձենք (2) հավասարումը լուծել ստանդարտ եղանակով (օրինակ, ինչպես սովորաբար լուծում են իռացիոնալ հավասարումները, կամ՝ փոփոխականների փոխարինումով՝ $\sqrt[4]{13-x}=u$, $\sqrt[4]{x+4}=v \Rightarrow u-v=1$ և $u^4+v^4=17$ և այլն), ապա կհանդիպենք լուրջ դժվարությունների:

* * *

Այժմ դիտարկենք մեկ փոփոխականով $f(x)=g(x)$ տեսքի այնպիսի հավասարումներ, որտեղ f և g ֆունկցիաներից մեկն աճող է, մյուսը՝ նվազող $X=D(f)\cap D(g)$ բազմության վրա: Հեշտությամբ կարելի է ապացուցել, որ այդպիսի հավասարումը չի կարող ունենալ մեկից ավելի արմատ (ապացուցեք ինքնուրույն): Հիմքում ունենալով այդ փաստը, առանց դժվարության կարող ենք ձևակերպել և ապացուցել նաև $f(x)>g(x)$ ($<$, $\geq$, $\leq$) տեսքի անհավասարումներին վերաբերող համանման պնդումներ, որտեղ f և g ֆունկցիաներից մեկն աճող է, իսկ մյուսը՝ նվազող $X=D(f)\cap D(g)$ բազմության վրա: Բավական է, միայն, նման դեպքում **ընտրությամբ** (համընտրանքով) հայտնաբերել x փոփոխականի այնպիսի x_0 արժեք, որի դեպքում ճիշտ է $f(x_0)= \; =g(x_0)$ հավասարությունը: Այլ կերպ ասած՝ բավական է գտնել f և g ֆունկցիաների գրաֆիկների հատման կետի աբսցիսը (եթե, իհարկե, այդպիսի կետ գոյություն ունի): Բերենք օրինակներ:

Օ ր ի ն ա կ 3: ***Լուծենք հավասարումը՝***

$$x^2-2x-16=\frac{16}{\sqrt{x-2}}:$$

Լ ու ծ ու մ: Հավասարման ԹԱԲ-ը $(2;\ \infty)$ միջակայքն է: Պարզ է, որ այդ բազմության վրա $g(x)=\dfrac{16}{\sqrt{x-2}}$ ֆունկցիան նվազող է:

Հավասարման աջ մասն արտագրենք այսպես՝

$$f(x)=(x-1)^2-17:$$

Այս տեսքից պարզ երևում է, որ f ֆունկցիան $[2;\infty)$ միջակայքի վրա աճող է: Հետևաբար տրված հավասարումը չի կարող ունենալ մեկից ավելի արմատ: Փորձարկելով նկատում ենք, որ $x=6$-ը դրա արմատ է, որն էլ կլինի միակը:

Օ ր ի ն ա կ 4: ***Լուծենք հավասարումը*** ՝

$$2^x=1-x:$$

Լ ու ծ ու մ: Դիտարկենք $f(x)=2^x$ և $g(x)=1-x$ ֆունկցիաները: Արդեն հայտնի է, որ R-ի վրա f-ն աճող է ($a>1$ դեպքում $y=a^x$ ֆունկցիան աճող է), իսկ g-ն՝ նվազող ($y=kx+b$ ֆունկցիան $k<0$ դեպքում նվազող է): Դժվար չէ նկատել, որ $x=0$-ն այդ հավասարման արմատ է, որն էլ կլինի միակը:

Օ ր ի ն ա կ 5: ***Լուծենք հավասարումը*** ՝

$$3^x+6^x=2^x:$$

Լ ու ծ ու մ: $x=-1$-ը նկատվող (ակնառու) արմատ է: Ի տարբերություն նախորդ օրինակների, նրա երկու մասերն էլ աճող ֆունկցիաներ են, դրա համար էլ վերոհիշյալ դատողություններն առայժմ կիրառելի չեն: Հավասարման երկու մասերը բաժանելով 2^x-ի, կստանանք դրան համարժեք հավասարում:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x+3^x=1:$$

Վերջին հավասարման ձախ մասը, որպես աճող ֆունկցիաների գումար, աճող ֆունկցիա է, իսկ աջ մասը հաստատուն է: Ուստի այն չի կարող ունենալ մեկից ավելի արմատ: Նշանակում է՝ $x=-1$ արմատը միակն է:

Օ ր ի ն ա կ 6: ***Լուծենք հավասարումը***՝

$$\log_2^2 x \le 13-12|x-1|: \qquad (3)$$

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Դիտարկենք երկու դեպք.

ա) $x \ge 1$: Այդ դեպքում անհավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\log_2^2 x \le 25-12x: \qquad (3')$$

Այնուհետև, նկատում ենք, որ $[1;\ \infty)$ միջակայքի վրա անհավասարման ձախ մասն աճող է, իսկ աջը՝ նվազող և $x=2$-ի դեպքում տեղի ունի հավասարության դեպքը: Հետևաբար $[1;\ 2)$ միջակայքի ցանկացած x-ի դեպքում $\log_2^2 x < 25-12x$, իսկ $(2;\ \infty)$ միջակայքի x-երի համար՝ $\log_2^2 x > 23-12x$, նշանակում է՝ $[1;\ 2]$ հատվածը տրված անհավասարման լուծումների բազմությունից է:

բ) $0 < x < 1$: Այդպիսի x-երի համար անհավասարումը բերվում է հետևյալ տեսքին՝

$$\log_2^2 x \le 12x+1: \qquad (3'')$$

Ստացված անհավասարման աջ մասը, ակնհայտորեն, նշված միջակայքի վրա աճող է: Ցույց տանք, որ $(0;\ 1)$ միջակայքի վրա $y=\log_2^2 x$ ֆունկցիան նվազող է:

Դիցուք՝ $x_1, x_2 \in (0;\ 1)$ և $x_2 > x_1$: Կազմենք ֆունկցիայի համապատասխան արժեքների տարբերությունը՝

$$y_2 - y_1 = \log_2^2 x_2 - \log_2^2 x_1 = (\log_2 x_2 + \log_2 x_1)(\log_2 x_2 - \log_2 x_1) < 0,$$

քանի որ $\log_2 x_2 + \log_2 x_1 < 0$ և $\log_2 x_2 > \log_2 x_1$ ($\log_2 x$ ֆունկցիան աճող է): Այսպիսով՝ $y_2 < y_1$, ուստի, իրոք, $y=\log_2^2 x$ ֆունկցիան $(0;\ 1)$ միջակայքում նվազող է:

Ընտրությամբ գտնում ենք, որ $x=\dfrac{1}{4}$ արժեքի դեպքում (3’’) անհավասարման մեջ տեղի ունի հավասարության դեպքը: Այդ կետով

$(0;\,1)$ միջակայքը տրոհվում է $\left(0;\ \frac{1}{4}\right)$ և $\left(\frac{1}{4};\ 1\right)$ ենթաբազմությունների, որոնցից միայն երկրորդն է դառնում $(3'')$, հետևաբար նաև (3) անհավասարման լուծումների բազմությունը $(0;\,1)$ միջակայքի վրա:

Պատասխան՝ $x \in \left[\frac{1}{4};\ 2\right]$:

* * *

Որոշ հավասարումներ լուծելիս անհրաժեշտություն է առաջանում կիրառել հետևյալ պնդումը՝

Եթե f-ը մոնոտոն ֆունկցիա է, ապա $f(x)=f(z)$ հավասարությունից հետևում է $x=z$ հավասարությունը:

Այդ պնդումը հեշտությամբ կարելի է ապացուցել՝ կիրառելով հակասող ենթադրության եղանակը: Հաջորդ օրինակում կօգտագործվի նաև այդ պնդումը:

Այժմ դիտարկենք $f(f(x))=x$ տեսքի հավասարումներ: Այդպիսի հավասարումները լուծելիս օգտակար կլինի հետևյալ թեորեմը՝

Եթե $y=f(x)$-ը աճող ֆունկցիա է, ապա $f(x)=x$ և $f(f(x))=x$ հավասարումները համարժեք են:

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Ամենից առաջ ակնհայտ է, որ եթե $x=x_0$-ն առաջին հավասարման արմատ է, ապա

$$f(x_0)=x_0 \Rightarrow f(f(x_0))=f(x_0)=x_0:$$

Նշանակում է՝ $x=x_0$-ն նաև երկրորդ հավասարման արմատ է: Այսպիսով, երկրորդ հավասարումը հետևանք է առաջին հավասարման: Այժմ ապացուցենք, որ երկրորդ հավասարման յուրաքանչյուր արմատը նաև արմատ է առաջինի համար: Իրոք. դիցուք՝ x_0-ն այնպիսին է, որ $f(f(x_0))=x_0$: Ենթադրենք՝ $f(x_0)\neq x_0$: Որոշակիության համար ընդունենք՝ $f(x_0)>x_0$: Այդ դեպքում f-ի աճելող լինելուց հետևում է, որ

$$f(f(x_0)) > f(x_0),$$

որն էլ հակասում է $f(f(x_0)) = x_0$ պայմանին:

Նույն ձևով ստացվում է հակասություն նաև $f(x_0) < x_0$ ենթադրության դեպքում: Թեորեմն ապացուցված է: Ապացուցված թեորեմից անմիջապես հետևում է ընդհանուր պնդում.

Եթե f-ը աճող ֆունկցիա է, ապա

$$f(f(\ldots f(x)\ldots)) = x \Leftrightarrow f(x) = x:$$

Բերենք երկու օրինակ, որոնք լուծվում են վերոհիշյալ թեորեմի կիրառմամբ:

Օրինակ 7: ***Լուծենք*** $x^3 + 1 = 2 \cdot \sqrt[3]{2x-1}$ ***հավասարումը:***

Լուծում: Ձևափոխելով հավասարումը՝ բերենք իրեն համարժեք հետևյալ հավասարմանը՝

$$\frac{1 + \left(\frac{x^3+1}{2}\right)^2}{2} = x: \qquad (4)$$

Ստացված հավասարումն ունի $f(f(x)) = x$ տեսքը, որտեղ

$$f(x) = \frac{1+x^3}{2}:$$

Քանի որ f-ն աճող ֆունկցիա է, ապա, համաձայն վերջին թեորեմի, կունենանք (4) հավասարմանը (հետևաբար նաև տրվածին) համարժեք $\frac{x^3+1}{2} = x$ հավասարումը: Լուծենք այն՝

$$x^3 - 2x + 1 = 0, \quad (x-1)(x^2 + x - 1) = 0,$$

որտեղից էլ կունենանք՝

$$x = 1; \;\; x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}; \;\; x = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}:$$

* * *

Անցնենք հավասարումների և անհավասարումների լուծման, այսպես կոչված, **գնահատման** եղանակին, որտեղ հիմնվելու ենք ֆունկցիայի արժեքների փոփոխության սահմանափակության հատկության վրա: Եռանկյունաչափական հավասարումները լուծելիս դուք արդեն օգտվել եք այդ եղանակից: Այդ եղանակի կիրառման առանձնահատկությունները հաջողությամբ են լուսաբանվում օրինակներով:

Օ ր ի ն ա կ 8: ***Լուծենք հետևյալ հավասարումը՝***

$$2\cos\left(x^3 - x\right) = 3^x + 3^{-x}: \qquad (5)$$

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Օգտվելով $t + \frac{1}{t} \geq 2 \ \left(t > 0\right)$ հայտնի անհավասարությունից և ընդունելով $t = 3^x$, կարող ենք գնահատել (5) հավասարման աջ մասը՝

$$3^x + 3^{-x} \geq 2 \quad \left(\forall x \in R\right):$$

Մյուս կողմից, ցանկացած x-ի դեպքում ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$2\cos\left(x^3 - x\right) \leq 2:$$

Նշանակում է՝ (5) հավասարումը համարժեք է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} 2\cos\left(x^3 - x\right) = 2, \\ 3^x + 3^{-x} = 2: \end{cases}$$

Համակարգի երկրորդ հավասարումից գտնում ենք՝ $x = 0$: Քանի որ այդ արժեքը բավարարում է նաև համակարգի առաջին հավասարմանը, ուստի $x = 0$ -ն համակարգի միակ լուծումն է, հետևաբար նաև՝ (5) հավասարման միակ լարմատը:

Օ ր ի ն ա կ 9: ***Լուծենք***

$$x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{1+x^2}$$

հավասարումը:

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Սկզբում ապացուցենք հետևյալ անհավասարությունը՝

$$(ac+bd)^2\le\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right):$$

Կազմենք աջ և ձախ մասերի տարբերությունը և ցույց տանք, որ այն ոչբացասական է.

$$\begin{aligned}&\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)-(ac+bd)^2=\\&a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-a^2c^2-2abcd-b^2d^2=\\&=(ad-bc)^2\ge 0:\end{aligned}$$

Նկատենք, որ հավասարության դեպք տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $ad=bc$: Ապացուցված անհավասարությունը կիրառենք մեր օրինակի վրա՝ ընդունելով՝

$$a=x,\quad c=\sqrt{1+x},\quad b=1,\quad d=\sqrt{3-x}.$$

$$\left(x\sqrt{1+x}+1\cdot\sqrt{3-x}\right)^2\le\left(x^2+1^2\right)\left(\left(\sqrt{1+x}\right)^2+\left(\sqrt{3-x}\right)^2\right)=4\left(x^2+1\right),$$

որտեղից կստանանք՝

$$\left|x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\right|\le 2\sqrt{x^2+1},$$

հետևաբար,

$$x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\le 2\sqrt{x^2+1}:$$

Ստացված արդյունքից եզրակացնում ենք, որ տրված հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$x\sqrt{3-x}=\sqrt{1+x}\quad (ad=bc):$$

Այս հավասարման երկու մասերը բարձրացնելով քառակուսի, կունենանք՝

$$x^2(3-x)=1+x,\ \ x^3-3x^2+x+1=0:$$

Վերջին հավասարման ձախ մասը վերածելով բազմապատկիչների, կստանանք՝

$$(x-1)(x^2-2x-1)=0,$$

որտեղից՝ $x=1$; $x=1+\sqrt{2}$; $x=1-\sqrt{2}$ ։

Ստուգումով պարզում ենք, որ վերջին արմատը կողմնակի է (այն առաջացել է քառակուսի բարձրացնելուց)։

Պատասխան՝ $1,\ 1+\sqrt{2}$ ։

Օ ր ի ն ա կ 10: **Լուծենք անհավասարումը՝**

$$(4x-x^2-3)\log_2(\cos^2\pi x+1)\geq 1:$$

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Անհավասարությունն արտագրենք այսպես՝

$$(1-(x-2)^2)\log_2(\cos^2\pi x+1)\geq 1:$$

Գնահատենք ձախ մասի արտադրիչները։ Ակնհայտ է, որ $\forall x\in R$ դեպքում

$$1-(x-2)^2\leq 1 \text{ և}$$
$$0\leq\log_2(\cos^2\pi x+1)\leq\log_2(1+1)=1:$$

Հետևաբար,

$$(1-(x-2)^2)\cdot\log_2(\cos^2\pi x+1)\leq 1\ \ (\forall x\in R):$$

Այսպիսով, տրված անհավասարման մեջ կարող է տեղի ունենալ միայն հավասարության դեպք։ Նշանակում է՝ այն համարժեք է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases}1-(x-2)^2=1,\\ \log_2(\cos^2\pi x+1)=1:\end{cases}$$

(6) հավասարումից կունենանք՝ $x=2$, որը բավարարում է նաև (7) հավասարմանը։ Հետևաբար վերջին համակարգն ունի միակ լուծում՝ $x=2$ ։

Օ ր ի ն ա կ 11: $(2;\ 5)$ ***միջակայքին պատկանող*** a ***պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում***

$$\log_2\left(3-|\sin ax|\right)=\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)$$

հավասարումը $[2;\ 3]$ ***հատվածում կունենա արմատ:***

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Պարզ է, որ ցանկացած x-ի դեպքում

$$\log_2\left(3-|\sin ax|\right)\geq \log_2 2=1,\ \text{իսկ}\ \cos\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)\leq 1:$$

Նշանակում է՝ տրված հավասարումը համարժեք է հավասարումների հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases}\log_2\left(3-|\sin ax|\right)=1,\\ \cos\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|\sin ax|=1,\\ x=\frac{1}{6}+2k,\ k\in Z:\end{cases}$$

$\frac{1}{6}+2k$ տեսքի թվերից $[2;\ 3]$ հատվածին պատկանում է միայն $\frac{13}{6}$ թիվը (երբ $k=1$): Այդ արժեքի դեպքում վերջին համակարգի առաջին հավասարումն ընդունում է $\left|\sin\frac{13}{6}a\right|=1$ տեսքը, որտեղից՝ $a=\frac{3\pi+6\pi n}{13}$ $(n\in Z)$: a-ի ստացված արժեքներից պետք է ընտրենք նրանք, որոնք պատկանում են $(2;\ 5)$ միջակայքին: Այդպիսինները կլինեն՝ $a_1=\frac{9\pi}{13}$ ($n=1$ դեպքում) և $a_2=\frac{15\pi}{13}$ ($n=2$ դեպքում):

Այսպիսով, խնդրի պայմաններին բավարարող a-ի արժեքները կլինեն $\frac{9\pi}{13}$ և $\frac{15\pi}{13}$ թվերը:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

Հետևյալ հավասարումները (անհավասարումները) լուծել և՛ սովորական եղանակով և՛ ֆունկցիայի մոնոտոնության հատկության կիրառմամբ: Համեմատեք լուծման երկու եղանակները (1-6).

1. $x^3+3x+14=0$:

2. $\sqrt{x-3}+\sqrt{3x+4}=5$:

3. $\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{x+6}=3$:

4. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$:

5. $\sqrt{3+x}\geq 3-x$:

6. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}<7$:

Լուծել հավասարումը (7-57).

7. $x^7+3x^5+2x^3=240$:

8. $x^3+x+2\sqrt{2x^2+x+1}=6$:

9. $\sqrt[4]{x-1}+2\cdot\sqrt[3]{3x+2}=4+\sqrt{3-x}$:

10. $4^x+10^x=0{,}35$:

11. $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\dfrac{7}{5}=2^x$:

12. $6^x+8^x=10^x$:

13. $5^x=8-3x$:

14. $\log_{0,5}x=x-6$:

15. $-2^{x^2+4x+6}=x^2+4x$:

16. $\log_2\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_3 x$:

17. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{2}\right)^3+\dfrac{1}{2}=x$:

18. $\sqrt{1+\sqrt{x}}=83-x^2$:

19. $\sqrt[3]{x}+1=2(2x-1)^3$:

20. $x^2-4x+5=\cos(x-2)$:

21. $2\cos\left(x^3-x^2\right)=\pi^x+\pi^{-x}$:

22. $4^{|2x-1|}=\sin\pi x$:

23. $3^{\left|\sin\sqrt{x}\right|}=\left|\cos x\right|$;

24. $\sin x = x^2+x+1$;

25. $\left|\sin\pi x\right|=\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}$;

26. $2\cos\pi x = 2x-1$;

27. $x\cdot 2^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\cdot 2^{x}=4$;

28. $2^{-\cos x}=\log_{\pi}x+\log_{x}\pi$;

29. $3\arcsin x+\pi x=\pi$;

30. $\arcsin\left(x^2-2x+2\right)=\dfrac{\pi x}{2}$;

31. $\log_{\pi}x = 1+\sin x\log_{\pi}2$;

32. $3^{|x-0,25|+2}=5+4\sin 2\pi x$;

33. $2^{1-|4x-1|}=x^2-2x+3$;

34. $2^{\sin x}+2^{\cos x}=2^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$;

35. $\log_3\left(8+2x-x^2\right)=2^{x-1}+2^{1-x}$;

36. $\log_{\frac{1}{3}}\left(3+\left|\sin x\right|\right)=2^{|x|}-2$;

37. $\log_3\left(4-\left|\sin\dfrac{4x}{3}\right|\right)=\sin x$;

38. $\sin\dfrac{\pi}{x^2+6x+13}=\dfrac{\log_3|x|+\log_{|x|}3}{2\sqrt{2}}$;

39. $\log_2\left(3+2x-x^2\right)=tg^2\dfrac{\pi x}{4}+ctg^2\dfrac{\pi x}{4}$;

40. $10^{x^2-4x+2}=\dfrac{1}{25}\left(\sin\dfrac{\pi x}{12}-\sin^2\dfrac{\pi x}{12}\right)$;

41. $\log_{0,5}|x|=\dfrac{1}{4}\left(|x-2|+|x+2|\right)$;

42. $\dfrac{x^2}{4\ln 10}-\dfrac{x}{2\ln 10}+1=\lg(5x)$;

43. $3\arccos x=\pi x+\dfrac{\pi}{2}$:

44. $\log_{\frac{1}{2}}(tg\pi x+ctg\pi x)=8\left(2x^2+3x+1\right)$:

45. $2x^2+\log_2\left(7+2x-x^2\right)=4+x^4$:

46. $\log_2\left(1+x^2\right)=\log_2 x+2x-x^2$:

47. $\log_2\left(x-x^2\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{x}\right|-2$:

48. $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$:

49. $\sqrt{1-\dfrac{x}{3}}+\sqrt[6]{x+1}=\left(1-\dfrac{x}{24}\right)^4+\left(1+\dfrac{x}{36}\right)^6$:

50. $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x^2}=4$:

51. $[x]=\sqrt{9-x^2}$:

52. $2[x]+3\{x\}=5$:

53. $[x]\left(x^2+x+1\right)=4$:

54. $3\lg^2 x+2[x]=6$

55. $3|\sin x|+2[x]=6$:

56. $\sin^2\{x\}=\dfrac{1}{4}$:

57*. $2^x=-x^2+2x+1$:

Լուծել հավասարումների համակարգը (58-62).

58. $\begin{cases}3^x=\sqrt{y},\\ 2^{-y}=x^3:\end{cases}$

59. $\begin{cases}x\cdot 2^{x-y+1}+3y\cdot 2^{2x+y}=2,\\ 2x\cdot 2^{2x+y}+3y\cdot 8^{x+y}=1:\end{cases}$

60. $\begin{cases}x\cdot 9^{y-x}+2y\cdot 3^{-x-y}=8\cdot 3^{-2x+y},\\ 3x\cdot 3^{2y+x}+2y\cdot 3^{2x-y+1}=72\cdot 9^{x-y}:\end{cases}$

61. $\begin{cases} x+2^x = y+2^y, \\ x^2y+y^2x=54 : \end{cases}$ **62.** $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=\log_3 y-\log_3 x, \\ x^2+y^2=32 : \end{cases}$

Լուծել անհավասարումը (63-82).

63. $x^5+x^4+2\sqrt{x}>4:$ **64.** $x^8+\sqrt{x-1}\geq 1:$

65. $2^x\geq 11-x:$ **66.** $\sqrt{x-1}+2^x+\log_2 x\geq 2:$

67. $\sqrt{1-x}+3\geq x+2^x:$ **68.** $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt{x-3}>\sqrt{2-\sqrt[4]{x}}:$

69. $x^3+x+2\sqrt{2x^2+x+1}\geq 6:$ **70.** $2^{\sqrt{x}}<\frac{1}{x}+1:$

71. $2^{\sqrt{1-x}}>x\lg x:$ **72.** $\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x^2}+tg\frac{\pi x}{4}>1:$

73. $\arcsin\frac{2}{x}+\sqrt{x-1}>1:$ **74.** $\cos(x+3tgx)+\left(tgx-tg^2x\right)^2\leq -1:$

75. $\frac{2^{x+1}-7}{x-1}<\frac{10}{3-2x}:$ **76.** $\frac{6}{2x+1}>\frac{1+\log_2(x+2)}{x}:$

77. $2^{-|x-2|}\log_2\left(4x-x^2-2\right)\geq 1:$ **78.** $\cos^2(x+1)\lg\left(9-2x-x^2\right)\geq 1:$

79. $(8-x)^{\log_2^2(8-x)}\leq 2^{3x-4}:$ **80.** $\left|\sqrt{2}|x|-1\right|\log_2\left(2-2x^2\right)\geq 1:$

81. $\sqrt{x+2}+\sqrt{16-x}\geq\frac{13}{2}-\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{7}:$

82. $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}\geq 3-\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{x}{4}\right):$

83. Ապացուցել, որ $2^{x+1}+2^{1-x}=\quad 4x-x^2$ հավասարումն արմատ չունի:

84. a-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $4^x+2=a\cdot 2^x\sin\pi x$ հավասարումն ունի ճիշտ մեկ լուծում:

85. Գտնել a պարամետրի բոլոր այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումն ունի միակ լուծում.

ա) $a\cos^2 x+\lg(1-x^2)=5$, բ) $a\cdot 4^{\sqrt{x^2+1}}=3^{\cos|x|}+a^2$:

Գտնել a-ի բոլոր այն արժեքները, որոնց դեպքում համակարգն ունի միայն մեկ լուծում (86-87).

86. $\begin{cases}(|x|+1)a=y+\cos x,\\ \sin^4 x+y^2=1:\end{cases}$

87. $\begin{cases}2^{|x|}+|x|=y+x^2+a,\\ x^2+y^2=1:\end{cases}$

88. Գտնել a պարամետրի բոլոր այն արժեքները, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում

$$\begin{cases}(x^2+1)^a+(b^2+1)^y=2,\\ a+bxy+x^2y=1\end{cases}$$

համակարգը ցանկացած b-ի դեպքում ունի գոնե մեկ լուծում:

89. Գտնել $(5;\ 16)$ միջակայքին պատկանող α պարամետրի բոլոր այն արժեքները, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում գոյություն ունի $[1;\ 2]$ հատվածից գոնե մեկ x, որը բավարարում է

$$1+\cos^2\left(\frac{\alpha x}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x-\sin\pi x|}$$

հավասարությանը:

90. a-ի ամեն մի արժեքի համար որոշել հետևյալ հավասարման արմատների քանակը.

$$|\lg x|=-(x-1)^2+a:$$

91. Տրված են երեք պնդումներ՝

ա) $x+\dfrac{1}{x}=a$ հավասարումն արմատ չունի,

բ) ճիշտ է $\sqrt{a^2-4a+4}=2-a$ հավասարությունը,

գ) հավասարումների

$$\begin{cases} x+y^2=a, \\ x-\sin^2 y=-3 \end{cases}$$

համակարգն ունի միակ լուծում:

a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում այդ պնդումներից երկուսը ճիշտ են, մեկը՝ կեղծ:

§ 4. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՈՒՌՈՒՑԻԿՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ԳՈԳԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԻԵՆՍԵՆԻ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիտարկենք ֆունկցիայի վարքը բնութագրող ևս երկու կարևոր հասկացություններ, որոնք անհրաժեշտ են ֆունկցիաներն ավելի հանգամանորեն հետազոտելու համար:

Սահմանում: f **ֆունկցիան** X **միջակայքում վրա կոչվում է ուռուցիկ (գոգավոր), եթե ցանկացած** $x_1, x_2 \in X$ **և ցանկացած** $a \geq 0,\ b \geq 0$ **թվերի համար, որտեղ** $a+b=1$**, տեղի ունի**

$$f(ax_1+bx_2) \geq af(x_1)+bf(x_2) \qquad (1)$$

[**համապատասխանաբար.**

$$f(ax_1+bx_2) \leq af(x_1)+bf(x_2)\ ] \qquad (2)$$

անհավասարությունը:

X միջակայքում f ֆունկցիայի ուռուցիկության (գոգավորության) երկրաչափական իմաստը կայանում է նրանում, որ այդ միջակայքի ցանկացած $[x_1;x_2]$ հատվածի վրա ֆունկցիայի գրաֆիկի բոլոր կետերն ընկած են $(x_1;f(x_1))$ և $(x_2;f(x_2))$ ծայրակետերով հատվածից ոչ ներքև (ոչ վերև):

Այս դեպքում $(x_1;x_2)$ միջակայքում վրա f ֆունկցիայի գրաֆիկն ամբողջությամբ ընկած է $(x_1;f(x_1))$ և $(x_2;f(x_2))$ ծայրակետերով հատվածից վերև (համապատասխանորեն՝ ներքև):

Եթե ֆունկցիան որևէ միջակայքում **ուռուցիկ (գոգավոր)** է, ապա այդ միջակայքի վրա նրա գրաֆիկը ևս կոչվում է **ուռուցիկ (գոգավոր):**

Եթե $x_1 \neq x_2$ և $a>0$, $b>0$ դեպքում (1) [(2)] անհավասարությունը խիստ է, ապա f ֆունկցիան կոչվում է **խիստ ուռուցիկ** (համապատասխանորեն՝ **խիստ գոգավոր**):

Օ ր ի ն ա կ 1: ***Ապացուցենք, որ $f(x)=x^2$ ֆունկցիան R -ում գոգավոր է:***

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Դիցուք՝ x_1-ը և x_2 -ը ցանկացած իրական թվեր են և a -ն ու b -ն $a+b=1$ պայմանին բավարարող ցանկացած ոչբացասական իրական թվեր են: Ապացուցենք, որ այդ դեպքում տեղի ունի (2) անհավասարությունը, այսինքն՝

$$(ax_1+bx_2)^2 \le ax_1^2+bx_2^2:$$

Կազմենք աջ և ձախ մասերի տարբերությունը և ցույց տանք, որ այն ոչբացասական է.

$$ax_1^2+bx_2^2-(ax_1+bx_2)^2 = ax_1^2+bx_2^2-a_1^2x_1^2+2abx_1x_2-b^2x_2^2 =$$
$$=a(1-a)x_1^2+b(1-b)x_2^2-2abx_1x_2 = ab(x_1-x_2)^2 \ge 0,$$

քանի որ $a\ge 0,\ b\ge 0$ և $(x_1-x_2)^2\ge 0$: Դրանով էլ հաստատվում է խնդրի պնդումը:
Մասնավորաբար, (1), [(2)] անհավասարության մեջ ընդունելով $a=b=\dfrac{1}{2}$, կունենանք՝

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad (3)$$

$$\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]: \qquad (4)$$

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն: Մաթեմատիկայում երբեմն ֆունկցիայի ուռուցիկության (գոգավորության) սահմանումը տրվում է (3) [(4)] պայմանով: Այսուհետև ֆունկցիայի ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը գտնելու համար մենք օգտվելու ենք հենց այդ տարբերակից:

*Օ ր ի ն ա կ 2։ **Հետազոտենք** $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$ **քառակուսային ֆունկցիան՝ ուռուցիկության և գոգավորության առումով։***

Լ ո ւ ծ ո ւ մ։ Դիտարկենք $v=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)-2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ տարբերությունը ցանկացած իրական x_1 և x_2 թվերի համար՝

$$v=\left(ax_1^2+bx_1+c\right)+\left(ax_2^2+bx_2+c\right)$$

$$-2\left[a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+c\right]=$$

$$=a\left(x_1^2+x_2^2-\frac{1}{2}x_1^2-x_1x_2-\frac{1}{2}x_2^2\right)=\frac{a}{2}(x_1-x_2)^2\text{:}$$

Վերջին արտահայտությունից պարզ երևում է, որ $a>0$ դեպքում $v\geq 0$, իսկ $a<0$ դեպքում $v\leq 0$։ Հետևաբար, եթե $a<0$, ապա f ֆունկցիան R-ում ուռուցիկ է, իսկ եթե $a>0$, ապա f-ը գոգավոր է R-ում։

* * *

Դիցուք՝ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է x_0 կետի որևէ δ շրջակայքում, այսինքն՝

$$(x_0-\delta;x_0) \quad \text{և} \quad (x_0;x_0+\delta)$$

միջակայքերում (x_0 կետում կարող է և որոշված չլինել)։

Եթե նշված միջակայքերից մեկում f ֆունկցիան խիստ ուռուցիկ է, իսկ մյուսում՝ խիստ գոգավոր, ապա ասում են, որ x_0 կետով անցնելիս f ֆունկցիան **փոխում է ուռուցիկության ուղղությունը**։

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է նաև x_0 կետում, ապա x_0 կետը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի **շրջման կետ**։ Այդ դեպքում $(x_0;f(x_0))$ կետն անվանում են $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի **շրջման կետ**։

Ֆունկցիաների ուռուցիկության և գոգավորության հետ սերտ կապ ունի մի հետաքրքիր և օգտակար անհավասարություն, որն անվանում են **Իենսենի անհավասարություն**:

Թեորեմ: **Եթե f ֆունկցիան X միջակայքի ցանկացած x_1 և x_2 թվերի համար բավարարում է (3) [(4)] պայմանին, ապա այդ միջակայքի ցանկացած $x_1, x_2, \ldots, x_n$ թվերի և $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 1$ պայմանին բավարարող ցանկացած $r_1, r_2, \cdots, r_n$ դրական ռացիոնալ թվերի համար տեղի ունի**

$$f(r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_nx_n) \geq r_1f(x_1) + r_2f(x_2) + \ldots + r_nf(x_n) \qquad (5)$$

$$[f(r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_nx_n) \leq r_1f(x_1) + r_2f(x_2) + \ldots + r_nf(x_n)] \qquad (6)$$

անհավասարությունը (Իենսենի անհավասարություն):

Ապացուցում: Նախ ապացուցենք, որ X միջակայքի ցանկացած $x_1, x_2, \ldots, x_n$ թվերի համար տեղի ունի

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \qquad (7)$$

անհավասարությունը ((5) անհավասարության մասնավոր դեպքը, երբ $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = \dfrac{1}{n}$):

Օգտվենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից:
$n = 2$ դեպքում կունենանք՝

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

որն էլ ճիշտ է՝ ըստ թեորեմի պայմանի:

Ենթադրենք, թե (7) անհավասարությունը ճիշտ է մի որոշ $n = k$ բնական թվի դեպքում, այսինքն՝

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_k)}{k} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}\right):$$

Ցույց տանք, որ այդ դեպքում (7) անհավասարությունը ճիշտ է նաև $n = k+1$ դեպքում: Դիտարկենք հետևյալ արտահայտությունը և գնահատենք այն՝ հաշվի առնելով ինդուկցիայի ենթադրությունը.

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{k+1})+(k-1)\ f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}}{k+1}\right)=$$

$$=\left[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_k)\right]+$$

$$+\left[f(x_{k+1})+\underbrace{f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}}{k+1}\right)+\ldots+f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}}{k+1}\right)}_{(k-1)\ \text{գումարելի}}\right]\le$$

$$\le k\ f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\right)+k\ f\left(\frac{x_{k+1}+(k-1)\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}}{k+1}}{k}\right)\le$$

$$\le 2k\ f\left(\frac{\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}+\dfrac{x_{k+1}+(k-1)\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}}{k+1}}{k}}{2}\right)=$$

$$=2k\ f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}}{k+1}\right),$$ որտեղից էլ կունենանք՝

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{k+1})}{k+1}\le f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}}{k+1}\right):$$

Դրանով էլ ապացուցվում է (7) անհավասարությունը:

Այժմ ապացուցենք (5) անհավասարությունը:

Դիցուք՝ $r_i = \dfrac{p_i}{q_i}(i = 1, 2, \ldots, n)$, որտեղ $p_i, q_i \in N$: $q_1, q_2, \ldots, q_n$ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը նշանակենք q -ով:

Այդ դեպքում $\dfrac{p_i}{q_i} = \dfrac{l_i}{q}$, որտեղ $l_i \in N$:

Նկատենք, որ

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_n = \frac{p_1}{q_1} \cdot q + \frac{p_2}{q_2} \cdot q + \ldots + \frac{p_n}{q_n} \cdot q =$$

$$= q\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \ldots + \frac{p_n}{q_n}\right) = q(r_1 + r_2 + \ldots r_n) = q:$$

$\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{l_1}, \underbrace{x_2,\ldots,x_2}_{l_2},\ldots, \underbrace{x_n,\ldots,x_n}_{l_n}$ q հատ թվերի համար կիրառելով (7) անհավասարությունը, կստանանք՝

$$\frac{l_1 f(x_1) + l_2 f(x_2) + \ldots + l_n f(x_{k+1})}{q} \le f\left(\frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + \ldots + l_n x_n}{q}\right):$$

Քանի որ $\dfrac{l_i}{q} = \dfrac{p_i}{q_i} = r_i$, վերջնականապես կստանանք՝

$$r_1 f(x_1) + r_2 f(x_2) + \ldots + r_n f(x_n) \le f(r_1 x_1 + r_2 x_2 + \ldots + r_n x_n):$$

(5) անհավասարությունն ապացուցված է: Նույն ձևով կապացուցվի նաև (6) անհավասարությունը (բավական է, միայն, անհավասարությունների նշաններն ամենուրեք փոխարինել իրենց հակադիրներով):

*Օ ր ի ն ա կ 3: **Ապացուցենք անհավասարությունը*** ՝

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \le n \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2):$$

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Դիտարկենք $f(x) = x^2$ ֆունկցիան R -ում: Դժվար չէ համոզվել, որ ցանկացած a_1 և a_2 թվերի համար տեղի ունի

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \le \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}$$

անհավասարությունը ((4) պայմանը): Հետևաբար, համաձայն (7) անհավասարության՝

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 \le \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n},$$

որտեղից էլ կստանանք՝

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \le n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right):$$

Օ ր ի ն ա կ 4: ***Ապացուցենք, որ*** $[0;\pi]$ ***հատվածի ցանկացած*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ***թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝***

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{n} \ge \sin\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Համոզվենք, որ ցանկացած $x_1, x_2 \in [0;\pi]$ թվերի համար տեղի ունի (3) անհավասարությունը, այսինքն՝

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} \ge \sin\frac{x_1 + x_2}{2}:$$

Իրոք,

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} = \sin\frac{x_1 + x_2}{2}\cos\frac{x_1 - x_2}{2} \le \sin\frac{x_1 + x_2}{2},$$

քանի որ $\frac{x_1 + x_2}{2} \in [0;\pi]$, իսկ այդ դեպքում $\sin\frac{x_1 + x_2}{2} \ge 0$ և $\cos\frac{x_1 - x_2}{2} \le 1$: Հետևաբար, համաձայն (7) անհավասարության, կունենանք՝ $\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{n} \ge \sin\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, որն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Օ ր ի ն ա կ 5: ***Ապացուցենք Կոշիի անհավասարությունը՝ ցանկացած*** n ***դրական թվերի թվաբանական միջինը փոքր չէ այդ թվերի երկրաչափական միջինից՝***

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\left(x_i>0,\quad i=1,2,...,n\right):$$

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Դիտարկենք $f(x)=\ln x$ ֆունկցիան: Ցույց տանք, որ այդ ֆունկցիայի $X=(0;\infty)$ որոշման տիրույթի ցանկացած x_1 և x_2 թվերի համար տեղի ունի (3) պայմանը, այսինքն՝

$$\ln\frac{x_1+x_2}{2}\geq\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}$$

Իրոք,

$$\ln\frac{x_1+x_2}{2}\geq\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}\Leftrightarrow\ln\frac{x_1+x_2}{2}\geq\ln\sqrt{x_1\cdot x_2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1+x_2}{2}\geq\sqrt{x_1\cdot x_2}\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2}{2}\geq 0:$$

Հետևաբար, ըստ թեորեմ 1-ի, ցանկացած $x_1,x_2,\ldots,x_n$ դրական թվերի համար տեղի ունի (7) անհավասարությունը, այսինքն՝

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\frac{\ln x_1+\ln x_2+\ldots+\ln x_n}{n}:$$

Այս անհավասարությունից էլ անմիջապես կստանանք ապացուցվելիք անհավասարությունը՝

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}:$$

Օ ր ի ն ա կ 6: ***Ապացուցենք, որ ցանկացած դրական*** a ***,*** b, c, d ***թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝***

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}\geq\frac{12}{a+b+c+d}:$$

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Դիտարկենք $f(x)=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան $X=(0;\infty)$ միջակայքում: Քանի որ ցանկացած դրական x_1 և x_2 թվերի համար տեղի ունի

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\geq\frac{2}{x_1+x_2}$$

անհավասարությունը ((4) պայմանը), ուստի, համաձայն թեորեմ 1-ի, ընդունելով՝

$$x_1=a+b,\quad x_2=a+c,\quad x_3=a+d,\quad x_4=b+c,$$

$$x_5=b+d,\quad x_6=c+d\quad \text{և}\quad r_1=r_2=...=r_6=\frac{1}{6}$$

կստանանք ապացուցվելիք անհավասարությունը:

* * *

Թ ե ո ր ե մ 2: **Եթե f ֆունկցիան X միջակայքի ցանկացած x_1, x_2 և ցանկացած $a_1\geq 0,\ a_2\geq 0$ թվերի համար, որտեղ $a_1+a_2=1$, բավարարում է (1) [(2)] պայմանին, ապա ցանկացած $x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ և $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$ պայմանին բավարարող ցանկացած ոչբացասական $a_1,a_2,...,a_n$ թվերի համար տեղի ունի**

$$f(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)\geq a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\ldots+a_nf(x_n)\quad (8)$$

համապատասխանաբար,

$$f(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)\leq a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\ldots+a_nf(x_n)\quad (9)$$

անհավասարությունը (Իենսենի անհավասարություն):

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Ապացուցենք, օրինակի համար, (9) անհավասարությունը: $n=2$ դեպքում (9) անհավասարությունը համընկնում է թեորեմի պայմանի հետ ((2) անհավասարության հետ): Ընդունենք, որ (9) անհավասարությունը ճշմարիտ է $n=k(k\geq 2)$ դեպքում: Ցույց տանք, որ այդ ենթադրությամբ այն ճշմարիտ է նաև $n=k+1$ դեպքում, այսինքն՝

$$a_1 f(x_1)+a_2 f(x_2)+\ldots+a_k f(x_k)+a_{k+1} f(x_{k+1})\ge$$

$\ge f(a_1x_1+\ldots+a_{k+1}x_{k+1})$, որտեղ $x_i\in X$, $a_i\ge 0 (i=1,2,\ldots,k+1)$ և

$a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}=1$: Իրոք.

$$a_1 f(x_1)+a_2 f(x_2)+\ldots+a_k f(x_k)+a_{k+1} f(x_{k+1})=$$

$$=(a_1+\ldots+a_k)\left(\frac{a_1}{a_1+\ldots+a_k}f(x_1)+\ldots+\frac{a_k}{a_1+\ldots+a_k}f(x_k)\right)+a_{k+1}f(x_{k+1})\ge$$

$$\ge(a_1+a_2+\ldots+a_k)\cdot f\left(\frac{a_1x_1+\ldots+a_kx_k}{a_1+\ldots+a_k}\right)+a_{k+1}f(x_{k+1})\ge$$

$$\ge f\left((a_1+\ldots+a_k)\frac{a_1x_1+\ldots+a_kx_k}{a_1+\ldots+a_k}+a_{k+1}x_{k+1}\right)=$$

$$=f(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k+a_{k+1}x_{k+1}):$$

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի համաձայն (9) անհավասարությունն ապացուցված է: Նույն ձևով կարելի է ապացուցել նաև (8) անհավասարությունը:

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն: Թեորեմ 1-ը թեորեմ 2-ի մասնավոր դեպքն է երբ a_i $(i=1,2,\ldots,n)$ թվերը ռացիոնալ են և $a_1=a_2=\frac{1}{2}$:

Դժվար չէ հասկանալ, որ սահմանման միջոցով ֆունկցիայի ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը գտնելը զգալի դժվարություններ է առաջացնում (նույնիսկ տարրական ֆունկցիաների դեպքում): Ֆունկցիայի այդ հատկությունը համեմատաբար հեշտ է ստուգել (3) [(4)] պայմանի միջոցով, թեև բարդ ֆունկցիաները քննարկելիս դժվարություններն անխուսափելի են:

Հետևյալ հատկությունները կարող են օգտակար լինել ֆունկցիաների ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը գտնելիս:

1) Ուռուցիկ (գոգավոր) ֆունկցիայի և դրական հաստատուն թվի արտադրյալն ուռուցիկ (գոգավոր) ֆունկցիա է:
2) Ուռուցիկ (գոգավոր) ֆունկցիայի և բացասական հաստատուն թվի արտադրյալը գոգավոր (ուռուցիկ) ֆունկցիա է:
3) Երկու ուռուցիկ ֆունկցիաների գումարը ուռուցիկ ֆունկցիա է:
4) Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որևէ միջակայքում դրական է և ուռուցիկ, ապա այդ միջակայքում $\frac{1}{f(x)}$ ֆունկցիան գոգավոր է:
5) Եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որևէ միջակայքում դրական, աճող և գոգավոր ֆունկցիաներ են, ապա $f(x)\cdot g(x)$ ֆունկցիան ևս այդ միջակայքում դրական է, աճող է, և՝ գոգավոր:
6) Եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որևէ միջակայքում դրական, նվազող և գոգավոր ֆունկցիաներ են, ապա $f(x)\cdot g(x)$ ֆունկցիան ևս դրական է, նվազող է, և՝ գոգավոր:
7) Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որևէ միջակայքում դրական է, նվազող է և ուռուցիկ, իսկ $g(x)$ ֆունկցիան՝ դրական, աճող և ուռուցիկ, ապա $f(x)\cdot g(x)$ ֆունկցիան այդ միջակայքում դրական է և ուռուցիկ:
8) Եթե որևէ միջակայքում $f(x)$-ը դրական և ուռուցիկ ֆունկցիա է, ապա $y=\sqrt[n]{f(x)}$ ֆունկցիան այդ միջակայքում ուռուցիկ է $(n\geq 2, n\in N)$:
9) Եթե $f(t)$ ֆունկցիան աճում է և գոգավոր է, իսկ $t=\varphi(x)$ ֆունկցիան՝ գոգավոր, ապա $f(\varphi(x))$ բարդ ֆունկցիան նույնպես գոգավոր է:

10) Եթե $f(t)$ ֆունկցիան նվազող է և գոգավոր, իսկ $t=\varphi(x)$ ֆունկցիան՝ ուռուցիկ, ապա $f(\varphi(x))$ բարդ ֆունկցիան գոգավոր է:

11) Եթե $f(t)$-ն աճող և ուռուցիկ ֆունկցիա է, իսկ $t=\varphi(x)$ ֆունկցիան՝ ուռուցիկ, ապա $f(\varphi(x))$ բարդ ֆունկցիան նույնպես ուռուցիկ է:

12) Եթե $f(t)$-ն նվազող և ուռուցիկ ֆունկցիա է, իսկ $t=\varphi(x)$-ը՝ գոգավոր, ապա $f(\varphi(x))$ ֆունկցիան ուռուցիկ է:

13) Դիցուք՝ $y=f(x)$ և $y=g(x)$ ֆունկցիաները փոխհակադարձ են: Այդ դեպքում՝

ա) եթե $f(x)$-ն աճող է և գոգավոր, ապա $g(x)$-ն աճող է և ուռուցիկ;

բ) եթե $f(x)$-ը նվազող է և ուռուցիկ, ապա $g(x)$-ը նվազող է և գոգավոր;

Օրինակ 7: ***Գտնենք հետևյալ ֆունկցիաների ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը.***

ա) $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$, բ) $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$

Լուծում: ա) f ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $[0;4]$ հատվածն է: Այդ հատվածում $\varphi(x)=4x-x^2$ ֆունկցիան ոչբացասական է: Մյուս կողմից, գիտենք, որ $y(x)=ax^2+bx+c$ ֆունկցիան $a<0$ դեպքում R-ում ուռուցիկ է: Հետևաբար, $\varphi(x)=4x-x^2$ ֆունկցիան $[0;4]$ հատվածում ուռուցիկ է: Այսպիսով, առկա են 8-րդ հատկության պայմանները: Նշանակում է՝ f ֆունկցիան ուռուցիկ է:

բ) g ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $(0;\infty)$ միջակայքն է: Այդ միջակայքի վրա $\sqrt{x}$ ֆունկցիան դրական է և ուռուցիկ: Հետևաբար, ըստ

4-րդ հատկության, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ֆունկցիան գոգավոր է: Մյուս կողմից, $\left(\frac{1}{e}\right)^x$ ֆունկցիան գոգավոր է (ցուցչային ֆունկցիան R-ում գոգավոր է): Քանի որ $(0;\infty)$ միջակայքում $p(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ և $q(x)=\left(\frac{1}{e}\right)^x$ ֆունկցիաները դրական, նվազող և գոգավոր ֆունկցիաներ են, ուստի, 6-րդ հատկության համաձայն

$$g(x)=p(x)\cdot q(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

ֆունկցիան ևս գոգավոր է:

Բնական հարց է առաջանում. կա՞ արդյոք այնպիսի հայտանիշ, որի միջոցով, առանց դժվարության, հնարավոր լինի գտնել տրված ֆունկցիայի ուռուցիկության (գոգավորության) միջակայքերը: Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում ձևակերպվում և ապացուցվում է այդպիսի հայտանիշ: Ձևակերպենք այն.

Դիցուք՝ f **ֆունկցիան կրկնակի ածանցելի է X միջակայքում: Այդ դեպքում (1) [(2)] պայմանը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ X միջակայքի ամեն մի x կետի համար տեղի ունի $f''(x)<0$ (համապատասխանաբար, $f''(x)>0$) անհավասարությունը:**

Բաց թողնելով այս թեորեմի ապացուցումը, անցնենք դրա կիրառմանը:

Օ ր ի ն ա կ 8: ***Ապացուցենք, որ $f(x)=x\ln x$ ֆունկցիան $(0;\infty)$ միջակայքում գոգավոր է:***

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Ունենք՝ $f'(x)=1+\ln x, f''(x)=\frac{1}{x}$: Քանի որ $(0;\infty)$ միջակայքում $\frac{1}{x}>0$, ուստի վերևում ձևակերպված հայտանիշի համաձայն f ֆունկցիան այդ միջակայքում գոգավոր է:

Օ ր ի ն ա կ 9: ***Ապացուցենք անհավասարությունը՝***

$$\frac{a+b+c}{3} \le a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c},$$

որտեղ $a,b,c>0$:

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Դիտարկենք $f(x)=\ln x$ ֆունկցիան: Քանի որ

ցանկացած $x>0$ դեպքում $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$, ուստի այդ ֆունկցիան

բավարարում է (1) պայմանին: Հետևաբար, թեորեմ 2-ի համաձայն, կարելի է կիրառել Իենսենի անահավասարությունը

$x_1=a,\ \ x_2=b,\ \ x_3=c$ և $a_1=\frac{a}{a+b+c},\ \ a_2=\frac{b}{a+b+c},\ \ a_3=\frac{c}{a+b+c}$

թվերի համար (նկատենք, որ $a_1+a_2+a_3=1$): Այդ դեպքում՝

$$\frac{a}{a+b+c}\cdot\ln a+\frac{b}{a+b+c}\cdot\ln b+\frac{c}{a+b+c}\cdot\ln c\le$$

$$\le\ln\left(a\cdot\frac{a}{a+b+c}+b\cdot\frac{b}{a+b+c}+c\cdot\frac{c}{a+b+c}\right),$$

որտեղից կստանանք՝

$$a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}:$$

Այժմ դիտարկենք $f(x)=x\ln x$ ֆունկցիան $(0;\infty)$ միջակայքում: Քանի որ $f''(x)=\frac{1}{x}>0$ (տես, օրինակ 8), ուստի f ֆունկցիան

բավարարում է (2) պայմանին: Ընդունելով՝ $a_1+a_2+a_3=\frac{1}{3};\ \ x_1=a,$

$x_2=b,\ \ x_3=c$, կարող ենք կիրառել Իենսենի անհավասարությունը ((6)-ը).

$$\frac{1}{3}(a+b+c)\ln\frac{a+b+c}{3} \le \frac{1}{3}(a\ln a + b\ln b + c\ln c),$$

որտեղից՝

$$\frac{a+b+c}{3} \le a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} :$$

Ապացուցվեց այն , ինչ պահանջվում էր:

Օ ր ի ն ա կ 10: ***Ապացուցել անհավասարությունը՝***

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+...+a_n} + \frac{a_2}{a_1+a_3+...+a_n} + ... + \frac{a_n}{a_1+a_2+...+a_{n-1}} \ge \frac{n}{n-1},$$

որտեղ $n>1,\ n\in N;\ a_1,a_2,...a_n>0$:

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Դիտարկենք $f(x)=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան $(0;\infty)$ միջակայքում: Հեշտ է նկատել, որ $f''(x)=\frac{2}{x^3}>0 \quad (\forall x\in R_+)$: Հետևաբար, այդ ֆունկցիան բավարարում է (2) պայմանին: Թեորեմ 2-ի շնորհիվ կարող ենք կիրառել Իենսենի անհավասարությունը՝ վերցնելով.

$$x_1=\frac{1}{a_2+a_3+...+a_n},\ x_2=\frac{1}{a_1+a_3+...+a_n},\ ...,\ x_n=\frac{1}{a_1+a_2+...+a_{n-1}}$$

$$b_1=\frac{a_1}{a_2+a_3+...+a_n},\ b_2=\frac{a_2}{a_1+a_3+...+a_n},\ ...,\ b_n=\frac{a_n}{a_1+a_2+...+a_n}:$$

$$\frac{a_1}{a_1+a_2+...+a_n}\cdot\frac{1}{a_2+a_3+...+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_2+...+a_n}\cdot\frac{1}{a_1+a_3+...+a_n}+$$

$$+...+\frac{a_n}{a_1+...+a_n}\cdot\frac{1}{a_1+...+a_{n-1}}\ge$$

$$\geq \frac{1}{a_1(a_2+a_3+...+a_n)+a_2(a_1+a_3+...+a_n)+...+a_n(a_1+a_2+...+a_{n-1})},$$

որտեղից՝

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+...+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_3+...+a_n}+...+\frac{a_n}{a_1+a_2+...+a_{n-1}} \geq$$

$$\geq \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{(a_1+...+a_n)^2-(a_1^2+...+a_n^2)} \geq \frac{n}{n-1}:$$

Վերջին անհավասարությունը հետևում է օրինակ 3-ի անհավասարությունից:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. f ֆունկցիան այնպիսին է, որ X միջակայքի ցանկացած x_1 և x_2 $(x_1 \neq x_2)$ թվերի համար ճիշտ է

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

անհավասարությունը: Ապացուցել, որ.

ա) ցանկացած $x_1, x_2, x_3 \in X$ թվերի համար, որոնցից գոնե երկուսը միմյանց հավասար չեն, տեղի ունի

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}$$

անհավասարությունը,

բ) ցանկացած $x_1, x_2, x_3 \in X$ թվերի համար, որոնցից գոնե երկուսը միմյանց հավասար չեն, տեղի ունի

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$$

անհավասարությունը:

2. Ապացուցել, որ $y = \cos x$ ֆունկցիան $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում բավարարում է (3) անհավասարությանը:

3. Ապացուցել, որ $y = \cos x$ ֆունկցիան $[0; \pi]$ հատվածում ուռուցիկ չէ:

4. Ապացուցել, որ $y = tgx$ ֆունկցիան $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում գոգավոր է:

5. Ապացուցել, որ $y = \sqrt[3]{x}$ ֆունկցիան $[0; \infty)$ միջակայքում ուռուցիկ է:

6. Ապացուցել, որ $y = \ln\left(x + \sqrt{x}\right)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է:

7. Ապացուցել, որ $y=2^{\sqrt{x}}\left(x^2+1\right)$ ֆունկցիան գոգավոր է:

8. Ապացուցել, որ $y=x^p$ ֆունկցիան $(0;\infty)$ միջակայքում գոգավոր է, եթե $p\in(-\infty;0)\cup(1,\infty)$ և ուռուցիկ՝ եթե $p\in(0;1)$:

Գտնել ֆունկցիայի ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը, ինչպես նաև՝ շրջման կետերը (9-15).

9. $f(x)=x^3$: **10.** $f(x)=\left|x^2-2x\right|$: **11.** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$:

12. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$: **13.** $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$:

14. $f(x)=x^3-3x^2+5x+8$: **15.** $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-7x+13$:

16. Ապացուցել, որ եթե $x+y+z+t=\dfrac{2}{3}\pi\left(x>0,\ y>0,\ z>0,\ t>0\right)$, ապա

$$\sin x+\sin y+\sin z+\sin t\le 2:$$

17. Ապացուցել, որ եթե $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ միջակայքի $x,\ y,\ z,\ t$ թվերը բավարարում են $x+y+z+t=\pi$ պայմանին, ապա

$$tgx+tgy+tgz+tgt\ge 4:$$

18. Ապացուցել, որ $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ միջակայքի կամայական $x_1,\ x_2,\ \ldots x_n$ թվերի համար ճիշտ է

$$\frac{\cos x_1+\cos x_2+\ldots+\cos x_n}{n}\le\cos\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

անհավասարությունը:

19. Ապացուցել, որ եթե $a+b+c+d=4\left(a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0\right)$, ապա

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\geq 4:$$

20. Ապացուցել, որ ցանկացած ոչբացասական $a_1,\ a_2,\ \dots\ a_k$ թվերի համար ճիշտ է

$$\frac{a_1^{\ n}+a_2^{\ n}+\dots+a_k^{\ n}}{k}\geq\left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k}\right)^n$$

անհավասարությունը (k -ն և n -ը կամայական բնական թվեր են):

21*. Ապացուցել, որ $a+b+c=30$ բավարարող ցանկացած դրական $a,\ b,\ c$ թվերի դեպքում $a^a\cdot b^b\cdot c^c\geq 10^{30}$:

22*. Ապացուցել անհավասարությունը՝

$$\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\geq xy\text{, որտեղ } x,\ y,\ p,\ q>0 \text{ և } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1:$$

23*. Ապացուցել, որ ցանկացած $a,\ b,\ c,\ d$ դրական թվերի համար ճիշտ է հետևյալ անհավա-սարությունը՝

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}\geq\frac{4}{3}:$$

24*. Դիցուք՝ $x,\ y,\ z>0$ և $x+y+z=1$: Ապացուցել, որ

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\geq 64:$$

α, β, γ - ն եռանկյան անկյունների մեծություններն են:
Ապացուցել, որ (25 -32).

25. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$:

26. $\sin\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\beta}{2} + \sin\dfrac{\gamma}{2} \le \dfrac{3}{2}$:

27. $\cos\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\beta}{2} + \cos\dfrac{\gamma}{2} \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$:

28. $tg\dfrac{\alpha}{2} + tg\dfrac{\beta}{2} + tg\dfrac{\gamma}{2} \ge \sqrt{3}$:

29. $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\beta}{2} + \sin^2\dfrac{\gamma}{2} \ge \dfrac{3}{4}$:

30. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \le \dfrac{9}{4}$:

31. $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} + \dfrac{1}{\sin\dfrac{\beta}{2}} + \dfrac{1}{\sin\dfrac{\gamma}{2}} \ge 6$:

32. $tg^n\alpha + tg^n\beta + tg^n\gamma \ge 3\sqrt{3^n}$ $\left(\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right), n \in N\right)$:

Ապացուցել անհավասարությունը (33 - 37).

33. $a^n + b^n > 2^{n-1}(a+b)^n$

34. $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$ $(x>0,\ y>0,\ x \ne y)$:

35*. $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+d} + \dfrac{c}{d+a} + \dfrac{d}{a+b} \ge 2$, որտեղ $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0)$:

36*. $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$ (Բունյակովսկու անհավասարությունը):

37. Ապացուցել անահավասարությունը.

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}, n \in N:$$

38*. Դիցուք $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$: Ապացուցել անհավասարությունը.

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots a_n^2}{n}} \le \sqrt[3]{\frac{a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3}{n}}, n \in N:$$

39*. Ապացուցել անահավասարությունը.

$$\sqrt[3]{\frac{a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3}{n}} \le \sqrt[4]{\frac{a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4}{n}}, n \in N:$$

40*. Հայտնի է, որ $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$: Ապացուցել անհավասարությունը.

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n}} \le \sqrt[k+1]{\frac{a_1^{k+1}+a_2^{k+1}+\ldots+a_n^{k+1}}{n}}, k \in N, k > 1 :$$

§ 5. ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

1. Ապացուցել, որ $f(x)=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան բավարարում է

$$f(x)-f(x+1)=f(x)f(x+1)$$

առնչությանը:

2. Ապացուցել, որ ցանկացած հաստատուն a և b թվերի դեպքում $f(x)=a\cdot 2^x+b\cdot 4^x$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ առնչությանը՝

$$f(x+2)-6f(x+1)+9f(x)=0:$$

3. Ապացուցել, որ $f(x)=(a+bx)\cdot 3^x$ ֆունկցիան բավարարում է է հետևյալ առնչությանը՝

$$f(x+2)+9f(x)=6f(x+1):$$

4. Ապացուցել, որ $f(x)=sin\left(c+2\pi m\frac{\lg x}{\lg a}\right)$ ֆունկցիան, որտեղ c-ն կամայական հաստատուն է, իսկ m-ը՝ ցանկացած ամբողջ թիվ, բավարարում է $f(ax)=f(x)$
առնչությանը (a-ն ցանկացած դրական թիվ է):

5. Ապացուցել, որ $f(x)=\frac{x^2-x}{2}+c$ և $g(x)=\frac{x-x^2}{2}-c$ ֆունկցիաները բավարարում են հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} f(1+x)+\varphi(1-x)=x, \\ f(-x)+\varphi(1+x)=0 \end{cases}:$$

6. Բերել f ֆունկցիայի օրինակ, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝

$$f(x+1)-f(x-1)=4x \quad (x\in R):$$

7. Բերել R-ում որոշված այնպիսի f ֆունկցիայի օրինակ, որի համար տեղի ունի $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ նույնությունը:

8. Բերել ֆունկցիայի օրինակ, որը բավարարում է

$f(xy)=f(x)+f(y)$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը:

9. Բերել ֆունկցիայի օրինակ, որը բավարարում է

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$$

ֆունկցիոնալ հավասարմանը:

10. Բերել $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների օրինակ, որոնք բավարարումեն հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x), \\ g(x+y)=g(x)g(y)-f(x)f(y): \end{cases}$$

11. Գտնել $f\left(\sqrt{3}\right)-$ ը, եթե ցանկացած $x\neq 0$ թվի դեպքում ճիշտ է

$$f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$$

հավասարությունը:

12. Հայտնի է, որ ± 1 և 2 թվերից տարբեր ցանկացած x-ի դեպքում F ֆունկցիան բավարարում է

$$F\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2F\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$$

առնչությանը: Գտնել $F(x)$-ը:

Գտնել բոլոր այն f ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են նշված առնչությանը(13-31).

13. $f\left(x^2\right)=\frac{1}{x} \quad (x>0)$:

14. $f(x+3)=x^2+6x \quad (x\in R)$

15. $f(x-5)=\frac{x+5}{x^2-10x+30} \quad (x\in R)$:

16. $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2} \quad (x\neq 0)$:

17. $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3} \quad (x\neq 0)$:

18. $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^4+\frac{1}{x^4} \quad (x\neq 0)$:

19. $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^5+\frac{1}{x^5} \quad (x\neq 0)$:

20. $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2} \quad (x<0)$:

21. $f\left(\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{x^2+4x+9}$:

22. $f\left(x^2+x\right)=x^4+2x^3-x$:

23. $f\left(x^2+x+1\right)=x^4+2x^3+3x^2-3$:

24. $f\left(sin^2x\right)=cos^2x$:

25. $f(\cos x)=sin^2x$:

26. $f(sinx+cosx)=sin2x$:

27. $f(x)+f(2x)=3x$:

28. $f(x)+f(3x)=x$:

29. $f(3x)-f(2x)=x$:

30. $f(x^2)+f(x)=x^2+x$:

31. $f(x^2)-f(x)=x^2-x$:

Գտնել R-ում որոշված և անընդհատ f ֆունկցիան, եթե ցանկացած $x, y\in R$ թվերի համար հավասարությունը ճիշտ է (32-33).

32. $f(x)+f(y)=(x+y)f(xy)$:

33. $x f(y)+y f(x)=(x+y)f(x)f(y)$:

34*. Գտնել ռացիոնալ թվերի բազմությունում որոշված բոլոր f ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են $f(1)=2$ և

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1 \quad (x, y\in Q)$$

առնչություններին:

35*. R-ում որոշված f ֆունկցիան ցանկացած x-ի դեպքում բավարարում է $f(x+1)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}$ առնչությանը: Ապացուցել, որ f ֆունկցիան պարբերական է: Բերել այդպիսի ֆունկցիայի օրինակ:

36. Դիցուք՝ $f: R\to R$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

ա) $f(1)=1$,

բ) ցանկացած $x, y\in R$ թվերի համար $f(x+y)=f(x)+f(y)$,

գ) ցանկացած $x\neq 0$ թվի դեպքում $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}f(x)$:

Գտնել $100f\left(\frac{17}{25}\right)$ արտահայտության արժեքը:

§ 6. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԼՈՒԾԵԼԻՍ

Երկրաչափության դպրոցական դասընթացի էական առանձնահատկություններից մեկն այն է, որ ուսուցման ընթացքում թեորեմներն ապացուցելիս և խնդիրներ լուծելիս իր ուրույն տեղն ունի «Վեկտոր» հասկացությունն իր կիրառություններով:

Դիտարկումները ցույց են տալիս, որ ճնշող մեծամասնությունը դժվարանում է վեկտորների օգնությամբ խնդիրներ լուծել: Հասկանալի է, որ վեկտորների մեթոդին տիրապետելու համար բավարար չէ միայն տեսական փաստերի իմացությունը:

Հաճախ նպատակահարմար է դիտարկել միավոր վեկտորներ. հատկապես այն դեպքերում, երբ հարկ է լինում հաստատել ուղիղների ուղղահայացությունը, անկյունների հավասարու-թյունը, բացահայտել պատկերներում առաջացած անկյունների միջև եղած առնչությունները և այլն:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում «Վեկտորներ» թեման ուսումնասիրվում է երկրաչափության մեջ (և՛ հարթաչափության, և' տարածաչափության մեջ): Առաջադրված խնդիրների տեքստերը, որոնք վերաբերվում են այդ թեմային, որպես կանոն, պարունակում են վեկտորներ: Այդ խնդիրները, ըստ էության, նպատակաուղղված են «վեկտոր» հասկացության հետ կապված սահմանումերի, գործողությունների և կանոնների յուրացմանը: Վեկտորների ուսուցումը կդառնա ինքնանպատակ, եթե այդ հասկացության հետ կապված առնչությունները սահմանափակվեն միայն այդպիսի խնդիրներով: Ինչ խոսք, նման խնդիրներն անհրաժեշտ են, որպեսզի սովորողները կարողանան ազատ գործողություններ կատարել վեկտորների հետ: Սակայն, սահմանափակվել միայն այդ խնդիրներով, սովորողները հնարավորություն չեն ունենա հասկանալու այդ թեմայի ներմուծման անհրաժեշտությունը ինչպես նաև նրա դերն ու նշանակությունը երկրաչա-փության մեջ: Վեկտորների կարևորությունն ու օգտակարությունը ի հայտ են գալիս այն դեպքում, երբ նրանք կիրառվում են երկրաչափական այնպիսի խնդիրներում, որոնց պայմաններում վեկտորներ հանդես չեն գալիս:

Բնագիտամաթեմատիկական հոսքի երկրաչափության դասընթացում, որտեղ կարող են ընդգրկվել դժվարավուն առաջադրանքներ, նրանցից կարելի է առանձնացել բազմաթիվ խնդիրներ, որոնք ավելի հաջողությամբ են լուծվում վեկտորների կիրառմամբ և որի շնորհիվ լուծումը դառնում է ավելի արդյունավետ և հետաքրքիր:

Երկրաչափական խնդիրների լուծման վեկտորական մեթոդը կարևոր մեթոդներից մեկն է դպրոցական մաթեմատիկայի դասընթացում: Փորձը ցույց է տալիս, որ այդ մեթոդը դժվարամատչելի է սովորողներից շատերի համար: Վեկտորական մեթոդի դժվարություն-ներից մեկն այն է, որ սովորողները ոչ բավարար չափով են տիրապետում այն կիրառելու կարողություններին և հմտություններին:

Վեկտորների կիրառմամբ խնդիրներ լուծելու կարողությունը պահանջում է որոշակի հմտություններ: Վեկտորների մեթոդը, ինչպես և ցանկացած այլ մեթոդ, միշտ չէ, որ կիրառելի է տվյալ խնդիրը լուծելիս: Խնդիրների լուծման հարուստ փորձով միայն կարելի է նախապես կռահել, թե տվյալ խնդրի լուծման համար վեկտորների մեթոդը կիրառելի է, թե' ոչ:

Ստորև բերվում են որոշ օգտակար պնդումներ, որոնք կարող են նպաստել վեկտորական մեթոդի ձևավորմանը՝ երկրաչափական խնդիրների լուծման համար: Դրան հասնելու համար ամենից առաջ սովորողները պետք է կարողանան.

1) *վեկտորների հետ կատարել հիմնական գործողությունները,*
2) *կատարել ձևական ձևափոխություններ վեկտորական արտահայտությունների հետ,*
3) *տրված վեկտորը վերլուծել ըստ երկու ոչ համագիծ (երեք ոչ համահարթ) վեկտորների,*
4) *երկրաչափական խնդրի պայմանը ներկայացնել վեկտորական լեզվով:*

Դրա համար սովորողներին անհրաժեշտ կլինի ձեռք բերել այնպիսի հմտություններ, որ նրանք կարողանան տվյալ խնդրի պայմանը՝ երկրաչափական փաստը ներկայացնել վեկտորական լեզվով, և հակառակը՝ վեկտորական արտահայտությանը տալ երկրաչափական մեկնաբանություն: Բերենք պարզ օրինակներ:

- a և b ուղիղների զուգահեռության պայմանը կարող է փոխարինվել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ համագիծ վեկտորներով, որը անալիտիկ գրառմամբ ներկայացվում է $\vec{a} = \overrightarrow{kb}$ տեսքով:
- a և b ուղիղների ուղղահայացության պայմանը կարող է փոխարինվել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ուղղահայաց վեկտորներով, որոնց սկալյար արտադրյալը հավասար է 0-ի $\left(\vec{a} \cdot \vec{b} = 0\right)$:
- «a և b ուղիղների կազմած անկյունը» կարելի է փոխարինել « $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը» պայմանով, այնուհետև ներկայացնել անալիտիկ գրառումը՝ $cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$:

Որպեսզի սովորողների մեջ ձևավորվի երկրաչափական խնդրի տեքստի, այսպես ասած, թարգմանության կարողությունը վեկտորական լեզվով, ամենից առաջ անհրաժեշտ է, որ նրանք կարողանան տեքստի առանձին դետալները և նրանց կապը ներկայացնել վեկտորական լեզվով: Այդպիսի հմտություններ ձեռք բերելու համար օգտակար կլինի, որ սովորողները նախապես տեղեկանան վեկտորների վերաբերյալ որոշ կարևոր առնչությունների ցանկի, որոնք հնարավորություն կտան երկրաչափական հիմնական հասկացությունները թարգմանել վեկտորական լեզվով և գտնել վեկտորական արտահայտության երկրաչափական մեկնաբանությունը: Դրանով հանդերձ, սովորողների մոտ համակարգվում են նաև վեկտորական հանրահաշվից ստացած գիտելիքները: Այդ ցանկի իմացությունը և գործածությունը կնպաստի վեկտորների ճիշտ ընտրություն կատարել՝ տվյալ երկրաչափական խնդիրը լուծելիս, ինչպես նաև կօգնի՝ խնդրի պայմանը գրառել ընտրված վեկտորների միջոցով և անել համապատասխան եզրակացություններ: Ներկայացնենք այդ ցանկը:

1) Ցանկացած երեք՝ A, B, C կետերի համար

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$ (եռանկյան կանոնը):

2) Ցանկացած A և B կետերի և կամայական 0 կետի համար

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$ (վեկտորների հանման կանոնը):

3) Եթե M-ը AB հատվածի միջնակետն է, ապա ցանկացած O կետի համար

$$OM=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right):$$

4) Եթե M-ը AB հատվածի միջնակետն է, ապա ցանկացած O կետի համար

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right):$$

5) C կետը AB հատվածը բաժանում է λ հարաբերությամբ $\left(AC:CB=\lambda\right)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}}{1+\lambda},$$

որտեղ O-ն ցանկացած կետ է:

6) $ABCD$ քառանկյունը կլինի զուգահեռագիծ այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի հետևյալ պայմաններից որևէ մեկը.

ա) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, բ) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,
գ) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ (O-ն ցանկացած կետ է):

7) M կետը կլինի ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի հետևյալ պայմաններից որևէ մեկը.

ա) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$,

բ) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$, որտեղ O-ն ցանկացած կետ է:

8) AB և CD ուղիղները զուգահեռ են այն և միայն այն դեպքում, երբ $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$, որտեղ k-ն զրոյից տարբեր որևէ թիվ է:

9) C կետը պատկանում է AB ուղղին այն և միայն այն դեպքում, երբ $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ (k-ն զրոյից տարբեր որևէ թիվ է):

10) Եթե $AB=a$, ապա $\overrightarrow{AB}^2=a^2$:

11) ABC -ն ուղղանկյուն եռանկյուն է, եթե $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ $\left(\angle C=90^0\right)$:

12) ABC-ն սուրանկյուն եռանկյուն է, եթե միաժամանակ տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0,\quad \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}>0,\quad \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}>0:$$

13) ABC -ն բութանկյուն եռանկյուն է, եթե տեղի ունի հետևյալ պայմաններից որևէ մեկը՝

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0,\quad \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}<0,\quad \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}<0:$$

14) H կետը կլինի ABC եռանկյան բարձրությունների հատման կետը այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի հետևյալ պայմաններից որևէ մեկը.

ա) $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$, բ) $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$,

որտեղ O -ն ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է:

15) Եթե O -ն ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է,

ապա

$$sin(2A)\cdot\overrightarrow{OA}+sin(2B)\cdot\overrightarrow{OB}+sin(2C)\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{O}:$$

16) Եթե Q-ն ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է, ապա տեղի ունի հետևյալ առնչություններից որևէ մեկը.

ա) $a\cdot\overrightarrow{QA}+b\cdot\overrightarrow{QB}+c\cdot\overrightarrow{QC}=\vec{0}\ (a=BC,\ \ b=AC,\ \ c=AB)$

բ) $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$ (O-ն ցանկացած կետ է):

17) Եթե A, B, C կետերը չեն պատկանում միևնույն ուղղին, ապա D կետը պատկանում է ABC հարթությանը այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\overrightarrow{OD}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}+z\cdot\overrightarrow{OC},$$

որտեղ O-ն ցանկացած կետ է և $x+y+z=1$:

18) Տարածության մեջ ցանկացած $\overrightarrow{p}$ վեկտորի համար գոյություն ունի միակ վերլուծություն տրված $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ոչ համահարթ վեկտորների միջոցով՝ $\vec{p}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}+z\cdot\vec{c}$

(x,y,z - ը միարժեքորեն որոշվող թվեր են):

Մասնավորաբար, եթե $x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}+z\cdot\vec{c}=\vec{0}$, ապա $x=y=z=0$:

19) Եթե M -ը $A_1A_2\ ...\ A_n$ կանոնավոր n անկյուն բազմանկյան կենտրոնն է,ապա

$$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+...+\overrightarrow{MA_n}=\vec{O}:$$

20) Եթե H-ը $ABCD$ օրթոկենտրոն քառանիստի բարձրություն-ների հատման կետն է, ապա

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right),$$

որտեղ O-ն այդ քառանիստին արտագծած գնդային մակերևույթի կենտրոնն է (քառանիստը կոչվում է *օրթոկենտրոն*, եթե նրա բարձրությունները հատվում են միևնույն կետում):

* * *

Նախապես ներմուծենք հետևյալ հասկացությունները, որոնք կարող են օգտակար դեր տանել ստորև բերված շատ խնդիրներ լուծելիս:

Սահմանում 1: **Տարածության A_1, A_2, ... , A_n կետերի համախմբի ցենտրոիդ (կենտրոնակերպ) է կոչվում այն կետը, որի համար տեղի ունի**

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_n}=\vec{0}$$

վեկտորական հավասարությունը:

Սահմանում 2: **Բազմանկյան (բազմանիստի) ցենտրոիդ (կենտրոնակերպ) կանվանենք նրա գագաթների համախմբի ցենտրոիդը:**

Թեորեմ *1.* **Տարածության ցանկացած A_1, $A_2,\ldots,A_n$, O և M կետերի համար ճիշտ է հետևյալ վեկտորական հավասարությունը՝**

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=n\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_n}$$

Հետևանք: M **կետը A_1, $A_2,\ldots,A_n$ կետերի համախմբի ցենտրոիդ է այն և միայն այն դեպքում, երբ տարածության ցանկացած O կետի համար տեղի ունի**

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}\right)$$

հավասարությունը:

Թեորեմ 2. **Տարածության ցանկացած n կետերի համախումբն ունի ցենտրոիդ, ընդ որում՝ միակը:**

Թ ե ո ր ե մ 3. **Եթե M_1-ը $A_1, A_2, ..., A_n$ կետերի համախմբի ցենտրոիդն է, իսկ M_2-ը՝ $B_1, B_2, ..., B_m$ համախմբի ցենտրոիդը, ապա $A_1, A_2, ..., A_n$; $B_1, B_2, ..., B_m$ $m + n$ կետերի համախմբի M ցենտրոիդը պատկանում է M_tM_2 հատվածին, ընդ որում**

$$M_1M : MM_2 = m : n:$$

Վերոնշյալ երեք թեորեմների ապացուցումները կատարեք ինքնուրույն:

Դիտարկենք մի քանի օրինակ, որոնք կարող են կողմնորոշիչ դեր ունենալ՝ վեկտորական մեթոդով երկրաչափական խնդիրներ լուծելիս:

Օ ր ի ն ա կ 1: ***Հետևյալ վեկտորական հավասարություններին տալ երկրաչափական մեկնաբանություն.***

ա) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=2\vec{a}^{\,2}+2\vec{b}^{\,2}$, *որտեղ* a *-ն և* b *-ն ոչ համագիծ վեկտորներ են,*

բ) $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)^2-\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}-\vec{c}^{\,2}$ ($\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *վեկտորները համահարթ չեն*):

Լուծում: ա) Դիտարկենք կամայական $ABCD$ զուգահեռագիծ. նշանակենք՝

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$: Քանի որ $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, իսկ $\overrightarrow{BD}=\vec{a}-\vec{b}$, ուստի տրված հավասարությանը կարելի է տալ այսպիսի երկրաչափական մեկնաբանություն՝

զուգահեռագծի անկյունագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է նրա բոլոր կողմերի քառակուսիների գումարին:

բ) Դիտարկենք $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ վեկտորների վրա կառուցված $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը: Այդ դեպքում տրված հավասարությունը կարելի է մեկնաբանել այսպես՝ **զուգահեռանիստի որևէ գագաթից ելնող անկյունագծի քառակուսին հավասար է այդ գագաթից ելնող նիստերի անկյունագծերի քառակուսիների գումարին՝ առանց այդ գագաթից ելնող կողերի քառակուսիների գումարի:** Իրոք, քանի որ

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AC_1},\quad \vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AA_1},\quad \vec{a}+\vec{c}=\overrightarrow{AD_1},\quad \vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AC_1},$$

ուստի տրված հավասարությունը կներկայացվի այսպես՝

$$AC_1^2=AA_1^2+AD_1^2+AC^2-AA_1^2-AB^2-AD^2,$$

որն էլ վերոնշյալ պնդման մաթեմատիկական գրառումն է:

Օ ր ի ն ա կ 2. ***Տրված է ABC եռանկյունը և կամայական O կետ: Ապացուցել, որ***

ա) $OA^2+OB^2+OC^2=3OM^2+MA^2+MB^2+MC^2$, ***որտեղ M -ը եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է,***

բ) $OA^2+OB^2+OC^2$ ***արտահայտությունը կընդունի փոքրագույն արժեք այն և միայն այն դեպքում, երբ O կետը համընկնում է M կետին:***

Լուծում: Նկատենք, որ

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA},\quad \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB},\quad \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}:$$

Այդ երեք հավասարությունները բարձրացնելով քառակուսի և գումարելով, կստանանք՝

$$\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2=3\cdot\overrightarrow{OM}^2+2\cdot\overrightarrow{OM}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)+\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2:$$

Այնուհետև, հաշվի առնելով այն, որ վեկտորի քառակուսին հավասար է իր երկարության քառակուսուն, և որ M -ը ABC եռանկյան ցենտրոիդն է, վերջին հավասարությունը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$OA^2+OB^2+OC^2=3\cdot OM^2+MA^2+MB^2+MC^2$$

Խնդրի առաջին մասն ապացուցված է:

Ստացված հավասարությունից հետևում է, որ $OA^2+OB^2+OC^2$ արտահայտությունը կընդունի փոքրագույն արժեք միայն այն դեպքում, երբ $3\cdot OM^2=0$, քանի որ $MA^2+MB^2+MC^2$ գումարը հաստատուն է), այսինքն՝ $OM = 0$: Ստացվում է, որ O և M կետերի հեռավորությունը զրո է, նշանակում է՝ O կետը համընկնում է եռանկյան միջնագծերի հատման M կետին:

Դիտողություն: Լուծված խնդրից հետևում է, որ ABC եռանկյան հարթության այն կետը, որից նրա գագաթները եղած հեռավորությունների քառակուսիների գումարը փոքրագույնն է, այդ եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է:

Օ ր ի ն ա կ 3. ***Ապացուցել, որ շրջանագծի ցանկացած կետից նրան ներգծած կանոնավոր բազմանկյան բոլոր գագաթներից ունեցած հեռավորությունների քառակուսիների գումարը հաստատուն է: Ինչի՞ է հավասար այդ գումարը, եթե շրջանագծի շառավիղը R է:***

Լուծում: Դիցուք, $A_1A_2\ldots A_n$-ը շրջանագծին ներգծած կանոնավոր բազմանկյունն է, M-ը՝ նրա կենտրոնը: Շրջանագծի ցանկացած P կետի համար կարող ենք գրել՝

$$\overrightarrow{PA_k} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA_k}:$$

Այդ հավասարության երկու մասերը բարձրացնելով քառակուսի, կստանանք՝ $\overrightarrow{PA_k}^2 = \overrightarrow{PM}^2 + 2\,\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{MA_k} + \overrightarrow{MA_k}^2$:

k-ին տալով 1, 2, ..., n արժեքները, գումարելով ստացված n հավասարությունները և հաշվի առնելով, որ

$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$ (տե՛ս 19-րդ պնդումը),

$MA_1 = MA_2 = \ldots = MA_n = PM$, (5) հավասարությունը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝ $PA_1^2 + PA_2^2 + \ldots + PA_n^2 = 2n\cdot PM^2$:

Այս հավասարությունից պարզ երևում է, որ $PA_1^2 + PA_2^2 + \ldots + PA_n^2$ գումարը հաստատուն մեծություն է (PM – ը շրջանագծի շառավիղն է): Տեղադրելով՝ $PM = R$, կստանանք այդ մեծության արժեքը՝ $2nR^2$:

Օ ր ի ն ա կ 4: ***Կառուցել խորանարդի երկու կից նիստերի խաչվող անկյունագծերի ընդհանուր ուղղահայացը: Գտնել այդ անկյունագծերի հեռավորությունը, եթե խորանարդի կողը հավասար է 1-ի:***

Լուծում: Դիտարկենք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը (նկ.1): Դիցուք, պահանջվում է կառուցել BA_1 և CB_1 խաչվող ուղիղների ընդհանուր MN ուղղահայացը: Նշանակենք՝ $\overrightarrow{BA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1}=\vec{c}$: Ենթադրենք՝ $\overrightarrow{BM} = x\cdot\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{CN} = y\cdot\overrightarrow{CB_1}$:

$\overrightarrow{BM}$ և $\overrightarrow{CN}$ վեկտորները վերածենք ըստ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ բազիսային վեկտորների: Քանի որ

$$\overrightarrow{BA_1}=\vec{a}+\vec{c},\quad \overrightarrow{CB_1}=\vec{c}-\vec{b},\quad \overrightarrow{BM}=x\left(\vec{a}+\vec{c}\right),\quad \overrightarrow{CN}=y\left(\vec{c}-\vec{b}\right),$$

հետևաբար

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=-x\vec{a}+(1-y)\vec{b}+(y-x)\vec{c}\ :$$

Քանի որ, MN և BA_1, MN և CB_1 զույգերից յուրաքանչյուրը փոխուղղահայաց ուղիղներ են, ուստի

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0 \text{ և } \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0: \quad (1)$$

Քանի որ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորները զույգ առ զույգ ուղղահայաց են, ուստի

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$: Մյուս կողմից, $\vec{a}^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2=1$:

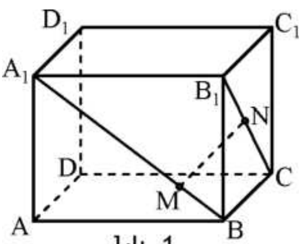
Այս նկատառումներով (1) հավասարությունների մեջ տեղադրելով արժեքները և կատարելով գործողությունները, կունենանք՝

$$\begin{cases}2x-y=0\\ x-2y=-1,\end{cases}\qquad x=\frac{1}{3},\quad y=\frac{2}{3}:$$

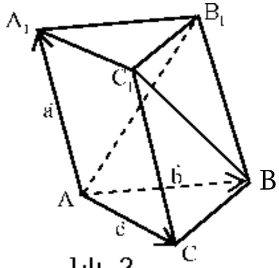
Հետևաբար, M և N կետերը BA_1 և CB_1 անկյունագծերը բաժանում են 1:2 հարաբերությամբ՝ սկսած B և B_1 կետերից, որից էլ հետևում է MN -ի կառուցումը: Մյուս կողմից, ստացել ենք՝

$$\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}:$$

Դժվար չէ համոզվել, որ $MN=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$:



Նկ. 1



Նկ. 2

Օ ր ի ն ա կ 5. $ABCA_1B_1C_1$ ***-ը եռանկյուն պրիզմա է: Հնարավո՞ր է, որ այդ պրիզմայի կողմնային նիստերի AB_1, BC_1 և CA_1 անկյունագծերը զուգահեռ լինեն միևնույն հարթությանը:***

Լուծում: *Ընտրենք բազիսային վեկտորները՝*

$$\overrightarrow{AA_1}=\vec{a},\quad \overrightarrow{AB_1}=\vec{b},\quad \overrightarrow{AC}=\vec{c}:$$

Այս դեպքում՝ $\overrightarrow{AB_1}=\vec{a}+\vec{b},\quad \overrightarrow{BC_1}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b},\quad \overrightarrow{CA_1}=\vec{a}-\vec{c}:$

Եթե AB_1, BC_1 և CA_1 անկյունագծերը (նկ.2) զուգահեռ լինեին որևէ հարթությանը, ապա, AB_1, BC_1, CA_1 վեկտորները կլինեին կոմպլանար (համահարթ): Ցույց տանք, որ դա հնարավոր չէ: Եթե նրանք լինեին համահարթ, ապա գոյություն կունենային այնպիսի x և y թվեր, որոնց համար տեղի կունենար

$$AB_1=x\cdot\overrightarrow{BC_1}+y\cdot\overrightarrow{CA_1},$$

այսինքն՝

$$\vec{a}+\vec{b}=x\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)+y\left(\vec{a}-\vec{c}\right)$$

հավասարությունը: Հաշվի առնելով այն փաստը, որ բազիսային վեկտորների միջոցով վերլուծումը միակն է, կունենանք՝

$$x+y=1,\quad x=-1,\quad x-y=0,$$

որոնք անհամատեղ են:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. ABC եռանկյան BC, AC, AB կողմերի վրա նշված են համապատասխանաբար A_1, B_1, C_1 կետերն այնպես են, որ
$$\overrightarrow{AC_1} = k \cdot \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BA_1} = k \cdot \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CB_1} = k \cdot \overrightarrow{CA}:$$
Գտնել գումարը՝ $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$:

2. $ABCD$ զուգահեռագծի AB, BC, CD, DA կողմերի վրա տրված են P, E, F, M կետերն այնպես են, որ $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CE} = k \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DM} = k \cdot \overrightarrow{DA}$: Ապացուցել, որ $PEFM$ -ը զուգահեռագիծ է:

3. ABC եռանկյան մեջ A_1, B_1, C_1 կետերը համապատասխանաբար BC, AC, AB կողմերի միջնակետերն են: Ապացուցել, որ հարթության ցանկացած O կետի համար
$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}:$$

4. Օգտագործելով վեկտորներ, ապացուցել, որ ցանկացած եռանկյան միջնագծերը հատվում են մեկ կետում, որով նրանցից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:

5. Օգտագործելով վեկտորներ, ապացուցել, որ սեղանի հիմքերի միջնակետերով տարված ուղիղն անցնում է կողմնային կողերի շարունակությունների հատման կետով, ինչպես նաև անկյունագծերի հատման կետով:

6. Տրված է ABC եռանկյունը. M -ը հարթության կամայական կետ է, A_1, B_1, C_1 կետերը M կետի նկատմամբ համապատասխանաբար A, B, C կետերի համաչափ կետերն են: Օգտվելով վեկտորներից, ապացուցել, որ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ և որ դրանց համապատասխան կողմերը զուգահեռ են:

7. Տրված է կամայական ABC եռանկյուն: Ապացուցել, որ գոյություն ունի եռանկյուն, որի կողմերը համապատասխանաբար զուգահեռ են և հավասար ABC եռանկյան միջնագծերին:

8. $ABCD$-ն և $A_1B_1C_1D_1$-ը զուգահեռագծեր են. M, P, F, H կետերը համապատասխանաբար AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 հատվածների միջնակետերն են: Ապացուցել, որ M, P, F, H կետերը կամ զուգահեռագծի գագաթներ են, կամ գտնվում են միևնույն ուղղի վրա:

9. Քառակուսուն ներգծված է շրջանագիծ: Ապացուցել, որ շրջանագծի ցանկացած կետից մինչև քառակուսու բոլոր գագաթները եղած հեռավորությունների քառակուսիների գումարը հաստատուն մեծություն է:

10. Տարածության մեջ տրված են $ABCD$ զուգահեռագիծը և կամայական $A_1B_1C_1D_1$ քառանկյունը: Ապացուցել, որ A_1BB_1, B_1CC_1, C_1DD_1, D_1AA_1 եռանկյունների միջնագծերի հատման կետերը զուգահեռագծի գագաթներ են:

11. ABC, $A_1B_1C_1$ և $A_2B_2C_2$ եռանկյունները դասավորված են այնպես, որ A, B, C կետերը համապատասխանաբար A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 հատվածների միջնակետերն են: Ապացուցել, որ ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ եռանկյունների միջնագծերի հատման կետերը գտնվում են միևնույն ուղղի վրա:

12. $ABCD$ քառանիստի մեջ AD և BC հանդիպակաց կողերը փոխուղղահայաց են, ուղղահայաց են նաև BD և AC կողերը: Օգտագործելով վեկտորներ, ապացուցել, որ CD և AB կողերը ևս փոխուղղահայաց են:

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի մեջ M-ը AA_1 կողի վրաայնպիսի կետ է, որ $AM:MA_1=3:1$, իսկ N-ը BC կողի միջնակետն է: Օգտագործելով վեկտորներ, գտնել MN և A_1C ուղիղների կազմած անկյան կոսինուսը:

14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյուն զուգահեռանիստում $AB=1$, $BC=2$, $BB_1=3$: Գտնել AB_1 և BC_1 ուղիղների կազմած անկյան կոսինուսը:

15. $DABC$ քառանիստի մեջ $DA=5$ սմ, $AB=4$ սմ, $AC=3$ սմ, $\angle BAC=90^0$, $\angle DAB=60^0$, $\angle DAC=45^0$: Գտնել A գագաթի հեռավորությունը DBC եռանկյան միջնագծերի հատման կետից:

16. Ապացուցել, որ զուգահեռագծի ցենտրոիդը նրա անկյունագծերի հատման կետն է:

17. Ապացուցել, որ եռանկյան ցենտրոիդը նրա միջնագծերի հատման կետն է:

18. Ապացուցել, որ ցանկացած քառանկյան ցենտրոիդը նրա հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածների հատման կետն է:

19. Տարածության մեջ տրված են ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները: M և M_1 կետերը դրանց ցենտրոիդներն են: Ապացուցել, որ

$$\overrightarrow{MM_1}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\right):$$

20. Ապացուցել, որ ցանկացած քառանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածները և անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածը հատվում են մի կետում և այդ կետով կիսվում են:

21*. Հնգանկյուն որևէ երկու գագաթները միացնող հատվածի (կողմի կամ անկյունագծի) միջնակետը միացված է այն եռանկյան միջնագծերի հատման կետին, որի գագաթները հնգանկյան մնացած երեք գագաթներն են: Ապացուցել, որ այդպիսով ստացված բոլոր տասը հատվածները հատվում են միևնույն կետում: Ի՞նչ կետ է դա:

22. Ապացուցել, որ ցանկացած քառանիստի խաչվող կողերի միջնակետերը միացնող հատվածները հատվում են միևնույն կետում և այդ կետով կիսվում են:

23. Ապացուցել, որ եռանկյուն բուրգի գագաթները հանդիպակաց նիստերի միջնագծերի հատման կետերին միացնող չորս հատվածները հատվում են մի կետում և այդ կետով բաժանվում են 3:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:

24. Ապացուցել, որ եթե M -ը $ABCD$ քառանիստի ցենտրոիդն է և O -ն տարածության կամայական կետ, ապա՝

$$OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2+4OM^2:$$

25*. Գտնել տարածության այն կետը, որից տրված քառանիստի գագաթներից ունեցած հեռավորությունների քառակուսիների գումարը ամենափոքրն է:

26. Երկու՝ $ABCD$ և $A_1B_1C_1D_1$ քառանիստերի համապատասխան գագաթներով անցնող AA_1, BB_1, CC_1 և DD_1 ուղիղները զուգահեռ են: Ապացուցել, որ այդ քառանիստերի M և M_1 ցենտրոիդներով անցնող MM_1 ուղիղը զուգահեռ է վերը նշված ուղիղներին:

27. Տարածության մեջ տրված են n կետեր՝ A_1, A_2, ... , A_n : Գտնել այն կետը, որից մինչև նշված բոլոր կետերը եղած հեռավորություն-ների քառակուսիների գումարը փոքրագույնն է:

28. Տրված է ABC եռանկյունը. O -ն տարածության կամայական կետ է: Ապացուցել, որ

$$OM^2=\frac{1}{3}\left(OA^2+OB^2+OC^2\right)-\frac{1}{9}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right),$$

որտեղ M -ը եռանկյան ցենտրոիդն է:

29*. Ապացուցել, որ եթե O -ն ABC եռանկյանն արտագծած շրջա-նագծի կենտրոնն է, իսկ M -ը՝ նրա ցենտրոիդը, ապա՝

$$OM^2=R^2-\frac{1}{9}\left(a^2+\ b^2+c^2\right),$$

որտեղ R -ն արտագծած շրջանագծի շառավիղն է, իսկ a, b, c -ն՝ եռանկյան կողմերի երկարությունները:

30*. Ապացուցել, որ շրջանագծի ցանկացած կետից նրան ներգծած կանոնավոր հնգանկյան բոլոր գագաթներն ունեցած հեռավորությունների քառակուսիների գումարը հաստատուն է: Ի՞նչի է հավասար այդ գումարը, եթե շրջանագծի շառավիղը R է:

31. Գտնել կանոնավոր n-անկյուն բազմանկյան բոլոր կողմերի և բոլոր անկյունագծերի քառակուսիների գումարը, եթե այդ բազմանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը R է:

32. Ապացուցել, որ տարածության ցանկացած A,B,C,D չորս կետերի համար ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0:$$

33. $EABCD$ քառանկյուն բուրգի բոլոր կողերը հավասար են: Գտնել արտահայտության արժեքը.

$$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{DA}:$$

34. Տրված է ABC եռանկյունը. CM-ը նրա միջնագիծն է: Ուղիղը հատում է CA,CB և CM հատվածները համապատասխանաբար A_1, B_1 և M_1 կետերում, այնպես, որ

$$\frac{CA_1}{CA}=p,\quad \frac{CB_1}{CB}=q,\quad \frac{CM_1}{CM}=t:$$

Ապացուցել, որ

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right):$$

35. DM-ը $ABCD$ քառանիստի միջնագիծն է (M-ը ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է): Հարթությունը հատում է DA, DB, DC և DM հատվածները համապատասխանաբար A_1, B_1, C_1, D_1 կետերում, այնպես, որ

$$\frac{DA_1}{DA}=a\,,\quad \frac{DB_1}{DB}=b\,,\quad \frac{DC_1}{DC}=c\,,\quad \frac{DM_1}{DM}=m:$$

Ապացուցել, որ $\quad \frac{1}{m}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$**:**

36*. $ABCD$ քառանիստի AB և CD կողերի K և M միջնակետերով անցնող հարթությունը BC կողը հատում է L կետում, իսկ AD կողը՝ N կետում: Ապացուցել, որ

$$\frac{BL}{LC}=\frac{AN}{ND},$$

և որ LN հատվածը KM ուղղով կիսվում է:

37*. Տրված է ABC եռանկյունը: Գտնել տարածության բոլոր այն M կետերի բազմությունը, որոնց համար

$$MA^2+MB^2=2MC^2:$$

38. Տրված են հավասար երկարությամբ չորս վեկտորներ՝ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ և $\overrightarrow{OD}$, ընդ որում դրանց գումարը զրոյական վեկտոր է: Ապացուցել, որ դրանցից ցանկացած երկու վեկտորների կազմած անկյունը հավասար է մյուս երկուսով կազմած անկյանը:

39. Զույգ առ զույգ ոչ զուգահեռ ուղիղներից յուրաքանչյուրը զուգահեռ է α հարթությանը: a ուղիղն այդ ուղիղների հետ կազմում է հավասար անկյուններ: Ապացուցել, որ a ուղիղն ուղղահայաց է α հարթությանը:

40. Տրված է $OABC$ եռանիստ անկյունը, որի հարթ անկյուններն են՝ $\angle AOB=\gamma$, $\angle BOC=\alpha$, $\angle AOC=\beta$: Գտնել AOC և BOC անկյունների կիսորդների կազմած անկյան կոսինուսը:

41. $OABCD$ քառանիստ անկյան հարթ անկյունները հավասար են: Ապացուցել, որ այդ քառանիստ անկյան անկյունագծային հատույթների հարթությունները փոխուղղահայաց են, այսինքն՝ $(AOC)\perp(OBD)$:

42*. Դիցուք, α,β,γ-ն եռանիստ անկյան հարթ անկյունների մեծություններն են, իսկ A,B և C-ն, համապատասխանաբար, այդ անկյունների դիմացի երկնիստ անկյուններն են: Ապացուցել հետևյալ հավասարությունները.

1) $$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}$$

(**սինուսների թեորեմը** եռանիստ անկյան համար):

2) $\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A$

(**կոսինուսների առաջին թեորեմը** եռանիստ անկյան համար):

3) $\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\alpha$

(**կոսինուսների երկրորդ թեորեմը** եռանիստ անկյան համար):

43. $OABC$ եռանիստ անկյան O գագաթից տարված ճառագայթը OA,OB և OC ուղիղների հետ կազմում է α,β և γ անկյուններ: Ապացուցել, որ

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1:$$

44. $OABC$ եռանիստ անկյան AOB և AOC հարթ անկյունների կիսորդները փոխուղղահայաց են: Ապացուցել, որ այդ կիսորդներն ընդգրկող հարթությունն ուղղահայաց է OBC նիստի հարթությանը:

Պ Ա Տ Ա Ս Խ Ա Ն Ն Ե Ր Ե Վ Ց Ո Ւ Ց Ո Ւ Մ Ն Ե Ր

§1. Թվային հաջորդականություններ: Հաջորդականության սահմանը

16. 2^n-1: **17.** $\dfrac{3^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2}$:

23. *Ցուցում*: Օգտվելով $\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$ անհավասարությունից, ապացուցել, որ ցանկացած n-ի դեպքում $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}<2$: **24.** *Ցուցում*: Նկատել, որ $\dfrac{2^n}{n!}=\dfrac{2^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\le\dfrac{2^n}{\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}_{n-1}}=2$:

29. *Ցուցում*: Համոզվել, որ ցանկացած n-ի դեպքում $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ge n\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$: Իսկ n-ի աճման հետ զուգընթաց $\sqrt{n}$ մեծությունը կարող է գերազանցել ցանկացած թվի (որքան էլ այն մեծ լինի):

30. Ցանկացած n-ի համար կարելի է ընտրել այնպիսի բնական k թիվ, որ $2^k\le n<2^{k+1}$: Այդ դեպքում

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+$$

$$+\left(\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}}_{8}\right)+\ldots+\left(\underbrace{\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}}\right)+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}+$$

$$+\frac{1}{n}>1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{k}=1+\frac{k}{2}:$$

Մյուս կողմից, n փոփոխականի անվերջ մեծանալու հետ մեկտեղ $1+\frac{k}{2}$ մեծությունը կարող է գերազանցել ցանկացած թվի:

48. ա) Ոչ, բ) ոչ: **49.** ա) Ոչ, բ) այո: **50.** Պնդումը ճշմարիտ չէ: **51.** Ոչ:

57. *Ցուցում*: Նկատել, որ $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$: **58.** 1000: **59.** –3:

60. 0,5: **61.** 1: **62.** 4: **63.** 1: **64.** 0: **65.** 1: **66.** 11: **67.** 1: **68.** 4: **69.** 0:

70. 0: **71.** $a_n=\frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}$: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$: **78.** $0<q<\frac{1}{2}$:

88. Ապացուցել, որ ցանկացած $n\geq 4$ -ի դեպքում $\frac{2^n}{n!}\leq\frac{32}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$: **89.** 3:

90. 4: **91.** 1: **92.** e^2 : **93.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$: **94.** $\frac{1}{1-x}$: **95.** $\frac{2}{3}$: **96.** $\frac{1}{e}$:

97. $\frac{1^{-}}{e}$: **98.** $\sqrt{e}$: **99.** e^2 : **100.** πr^2 :

§2. Պրոգրեսիաներ և գումարներ

7. 0: **16.** *Ցուցում*: Սկզբում համոզվել, որ n -րդ խմբի առաջին անդամը $(1+2+3+...+(n-1))+1$ -րդ կենտ թիվն է, այսինքն՝ $2\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)-1=n^2+n+1$ թիվն է: **18.** $a_n=1+\frac{3n(n-1)}{2}$, $S_n=\frac{n(n^2+1)}{2}$:

19. $2a^2$: **20.** ա) $6a$, բ) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, գ) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi a$, դ) $\frac{\pi a^2}{9}$: **21.** 7: **22.** $\frac{2}{3}$:

23. $\frac{1}{2}$, $-\frac{7}{9}$: **24.** 2: **25.** Այո: **26.** $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{4}$: **27.** $\frac{1}{5}$: **28.** $\frac{1}{2}$: **29.** $\frac{1}{2}$:

30. $\frac{2}{3}$: **31.** 4: **32.** $\frac{5}{2}$: **33.** $\frac{4}{7}$: **34.** 100: **37.** $-n(2n+1)$:

38. $\frac{7}{81}\left(10^{n+1}-9n-10\right)$: **39.** $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$: **40.** $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$:

41. $\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$: **42.** $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$: **43.** $(n+1)!-1$: **44.** $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$:

45. $\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$: **46.** $(n-1)2^{n+1}-\frac{n(n+1)}{2}+2$: **47.** $n\cdot 5^n$:

48. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$: **49.** $\frac{3^{n+1}-2^{n+1}-1}{2^n}$: **50.** $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$:

51. $\frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$: **52.** $\frac{n(n+1)}{2}$, եթե $a=1$; $\frac{a^{n+1}-(n+1)a+n}{(a-1)^2a^{n-1}}$, երբ $a\neq 1$:

53. $\frac{n(n+1)}{2}$, եթե $x=1$; $\frac{x^{n+2}-(n+1)x^2+nx}{(x-1)^2}$, երբ $x\neq 1$:

54. $\frac{2^{n+1}-1}{2}$, եթե $a=1$; $\frac{1}{a-1}-\frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}$, երբ $a\neq 1$: **55.** $1-\frac{2^{100}}{2^{2^{100}}+1}$:

56. բ) $a_n=5+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$:

§3. Հավասարումների և անհավասարումների լուծում ֆունկցիաների հատկությունների կիրառմամբ

7. 2: **8.** 1: **9.** 2: **10.** –1: **11.** 1: **12.** 2: **13.** 1: **14.** 4: **15.** –2: **16.** 9:

17. 1; $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$: **18.** 9: **19.** 1: **20.** 2: **21.** 0: **22.** $\frac{1}{2}$: **23.** 0: **24.** $\varnothing$: **25.** 1:

26. $\frac{1}{2}$: **27.** 1: **28.** π: **29.** $\frac{1}{2}$: **30.** 1: **31.** π: **32.** $\frac{1}{4}$: **33.** $\varnothing$:

34. $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$: **35.** 1: **36.** 0: **37.** $\frac{3\pi}{8}+6\pi k,\ k\in Z$: **38.** –3:

39. 1: **40.** 2: **41.** $\pm\frac{1}{2}$: **42.** 2: **43.** $\frac{1}{2}$: **44.** $-\frac{3}{4}$: **45.** 1: **46.** 1:

47. $\frac{1}{2}$: **48.** $\frac{1}{4}; 2$: **49.** $-\frac{3}{4}$: **50.** 0: **51.** $\sqrt{5}$: **52.** $\frac{7}{3}$: **53.** $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$:

54. $10^{-\sqrt{2}}$: **55.** $\pi - \arcsin\frac{2}{3}$: π: **56.** $\frac{\pi}{6}+k,\ k\in Z$: **57.** $\{0; 1\}$:

58. $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$: **59.** $(1; -1)$: **60.** $(2; 1)$: **61.** $(3; 3)$: **62.** $(4; 4)$:

63. $(1; +\infty)$: **64.** $[1; +\infty)$: **65.** $[3; +\infty)$: **66.** $[1; +\infty)$: **67.** $(-\infty; 1]$:

68. $[3; 16]$: **69.** $[1; +\infty)$: **70.** $(0; 1)$: **71.** $(0; 1]$: **72.** $[1; 2)$:

73. $[2; +\infty)$: **74.** $\pi+2\pi k,\ k\in Z$: **75.** $\left(1; \frac{3}{2}\right)$: **76.** $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$: **77.** 2 ժ:

78. -1: **79.** $[4; 8)$: **80.** 0: **81.** 7: **82.** 4: **84.** $a=2\sqrt{2}$:

85. ա) $a=5$, բ) $a=1$; $a=3$: **86.** $a=2$: **87.** $a=2$: **88.** $a=1$

89. $\frac{9\pi}{5}; \frac{17\pi}{5}; 5\pi$: **90.** Արմատ չունի, եթե $a<2$; մեկ արմատ, եթե $a=0$, երկու արմատ, եթե $a>2$: **91.** $a\in\{-3\}\cup(-1; 1)$:

§4. Ֆունկցիայի ուռուցիկությունը և գոգավորությունը: Իենսենի անհավասարությունը

9. $(-\infty; 0]$ միջակայքում ուռուցիկ է, իսկ $[0; +\infty)$ միջակայքում՝ գոգավոր է: $(0; 0)$-ն միակ շրջման կետն է: **10.** $(-\infty; 0]$ և $[2; +\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում գոգավոր է, իսկ $[0; 2]$ միջակայքում՝ ուռուցիկ: $(0; 0)$ և $(2; 0)$ կետերը շրջման կետերն են: **11.** $(-\infty; 0]$ և $[0; +\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում ուռուցիկ է: Շրջման կետ չունի: **12.** $(-\infty; 0)$ միջակայքում ուռուցիկ է, իսկ $(0; +\infty)$-ում՝ գոգավոր: Շրջման կետ չունի:

13. $(-\infty; 0)$ և $(1; +\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում գոգավոր է, իսկ $(0; 1]$ միջակայքում՝ ուռուցիկ: Միակ շրջման կետը՝ $(1; 0]$: **14.** $(-\infty; 1]$ միջակայքում ուռուցիկ է, իսկ $[1; +\infty)$-ում՝ գոգավոր: Միակ շրջման կետը՝ $(1;11)$: **15.** Ֆունկցիան R-ում գոգավոր է: **20.** *Ց ու ց ու մ* : Դիտարկել $f(x)=x^n$, $x\in(0;+\infty)$ ֆունկցիան և համոզվել, որ այն գոգավոր է: Այնուհետև կիրառել Իենսենի անհավասարությունը:

21. *Ցուցում*: Դիտարկել $f(x)=x\ln x$ ֆունկցիան: Քանի որ այն գոգավոր է (տե՛ս՝ 8-րդ օրինակը), ուստի

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right):$$

22. *Ցուցում*: Դիտարկել $f(x)=\ln x$ ֆունկցիան: Քանի որ այդ ֆունկցիան ուռուցիկ է, ուստի ցանկացած դրական x_1, x_2 և $a_1+a_2=1$ պայմանին բավարարող կամայական դրական a_1 և a_2 թվերի համար տեղի ունի

$$a_1 f(x_1)+a_2 f(x_2)\leq f(a_1x_1+a_2x_2)$$

անհավասարությունը: Այնուհետև տեղադրել՝

$$a_1=\frac{1}{p},\quad a_2=\frac{1}{q},\quad x_1=x^p,\quad x_2=y^p:$$

23. *Ցուցում*: Դիտարկել $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ ֆունկցիան: Համոզվել, որ $(-\infty;\,0)$ միջակայքում այն գոգավոր է: Այնուհետև կիրառել Իենսենի անհավասարությունը

$$x_1=\frac{a}{S},\quad x_2=\frac{b}{S},\quad x_3=\frac{c}{S},\quad x_4=\frac{c}{S}$$

թվերի համար, որտեղ $S=a+b+c+d$:

24. *Ցուցում*: Դիտարկել $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ ֆունկցիան $(0;+\infty)$ միջակայքում և ցույց տալ, որ այն գոգավոր է $\left(f''(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}>0\right)$:

§5. Ֆունկցիոնալ հավասարումներ

11. $-\frac{1}{4}$: **12.** $F(x)=\frac{4x+5}{3(1-x)}$: **14.** $f(x)=x^2-9$: **15.** $f(x)=\frac{x-10}{x^2+5}$:
16. $f(x)=x^2-2$: **17.** $f(x)=x^3-3x$: **18.** $f(x)=x^4-4x^2+2$:
19. $f(x)=x^5-2x^3-3x^2+5x$: **20.** $f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$: **21.** $f(x)=\frac{x^2}{5x^2+1}$:
22. $f(x)=x^2-x$: **23.** $f(x)=x^2-4$: **24.** $f(x)=1-x,\ x\in[0;\,1]$:
25. $f(x)=1-x^2,\ x\in[-1;\,1]$: **26.** $f(x)=x^2-1,\ x\in\left[-\sqrt{2};\,\sqrt{2}\right]$:
27. $f(x)=x$: **28.** $f(x)=\frac{1}{4}x$: **27.** $f(x)=x+c$, c-ն կամայական իրական թիվ է: **30.** $f(x)=x$: **31.** $f(x)=x+c$, $c\in R$:
32. $f(x)\equiv 0$: **33.** $f(x)\equiv 0$ կամ $f(x)\equiv 1$: **34.** $f(x)=x+1$:
35. Համոզվել, որ $T=2$ թիվը պարբերություն է: Այսպիսի ֆունկցիայի օրինակ՝

$$f(x)=\begin{cases}1, & 2n\le x<2n+1\\ 2, & 2n+1\le x<2n+2\end{cases},$$

որտեղ $n=0;\pm1;\pm2;\ldots$: **36.** 68:

§6. Վեկտորների կիրառումը երկրաչափական խնդիրներ լուծելիս

1. $\vec{0}$: **13.** $\frac{3\sqrt{87}}{29}$: **14.** $\frac{9}{\sqrt{130}}$: **15.** $\frac{1}{3}\sqrt{70+15\sqrt{2}}$:
25. Քառանիստի ցենտրիոդն է: **27.** Որոնելի կետը տրված կետերի համախմբի ցենտրիոտն է: **30.** $10R^2$: **31.** n^2R^2: **33.** 0:
37. Որոնելի բազմությունը ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնով անցնող և CD միջնագծին ուղղահայաց հարթությունն է:
41. $\cos\varphi=\frac{1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Կորյուն Գարեգինի Առաքելյան
Հայկազն Սարիբեկի Նավասարդյան
Արման Հովհաննեսի Սարգսյան

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ԽՈՐԱՑՎԱԾ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

11-րդ դասարան

Խմբագիր՝ **Կորյուն Առաքելյան**
Կազմի ձևավորումը՝ **Գևորգ Շառոյանի**
Համակարգչային ձևավորումը՝ **Հրայր Շառոյանի**
Համակարգչային շարվածքը՝ **Հասմիկ Առաքելյանի**

Ստորագրված է տպագրության 15.08.2016:
Չափսը՝ 60x84 1/16: Թուղթը՝ օֆսեթ:
Տպագրությունը՝ օֆսեթ: 8 տպ. մամուլ:
Տպաքանակը՝ 200 օրինակ:

«ԳԵՎՈՐԳ - ՀՐԱՅՐ» ՍՊԸ

ԼՈՒՍԱԿՆ

Հրատարակչություն
Երևան, Գրիգոր Լուսավորչի 6:
Հեռ.՝ 52.79.74
էլ. փոստ lusakn@rambler.ru