Կորյուն Առաքելյան
Հայկազն Նավասարդյան
Արման Սարգսյան

Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա

ԽՈՐԱՑՎԱԾ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

9-րդ դասարան

Երևան 2016

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻՆ ԱՌԸՆԹԵՐ ԱՐՏԱՇԵՍ ՇԱՀԻՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՖԻԶԻԿԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՏՈՒԿ ԴՊՐՈՑ

Ձեռնարկը համապատասխանեցված է ԿԳ նախարարության կողմից հաստատված մաթեմատիկայի մասնագիտացման ուղղվածության ծրագրին

Նախաբան

Մաթեմատիկական կրթությունը և մաթեմատիկական մտածելակերպն անհրաժեշտ են ոչ միայն նրանց, ովքեր հետագայում կզբաղվեն մաթեմատիկայով կամ գիտական որևէ հետազոտությամբ, այլ նաև բոլոր նրանց, ովքեր կաշխատեն ժողովրդական տնտեսության տարբեր բնագավառներում:

Կրթության գործընթացում մաթեմատիկական խնդիրներն ունեն ուսուցողական, գործնական և դաստիարակչական նշանակություն: Նրանք զարգացնում են սովորողների ալգորիթմական, տրամաբանական մտածողությունը, մշակում մաթեմատիկան կիրառելու գործնական հմտություններ, ձևավորում աշխարհայացք: Խնդիրների լուծումը նրանց մղում է ստեղծագործական աշխատանքի:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասագրքերում զետեղված խնդիրները, որպես կանոն, նպատակաուղղված են տվյալ թեմայի տեսական նյութի յուրացմանը: Սահմանափակվելով միայն դասագրքում ընդգրկված խնդիրներով՝ սովորողների մոտ կարող են ձևավորվել միայն սերտողական բնույթի գիտելիքներ: Միօրինակ կամ միայն ալգորիթմական խնդիրները չեն կարող ապահովել սովորողների մտավոր զարգացմանը ներկայացվող պահանջներին:

Մաթեմատիկայի նկատմամբ հակումներ ունեցող սովորողները չեն բավարարվում մաթեմատիկայի դասերին ստացած գիտելիքներով, հետևաբար և ցանկություն է առաջանում ավելի շատ տեղեկություն ստանալ իրենց սիրած առարկայի մասին, իմանալ, թե ինչպես է այն կիրառվում կյանքում, լուծել հետաքրքիր և ավելի բարդ խնդիրներ:

Սույն ձեռնարկում ընդգրկված նյութերը կարող են նպաստել մաթեմատիկական գիտելիքների ընդլայնմանը, ծրագրային նյութը խորությամբ յուրացնելուն, տրամաբանական մտածողության զարգացմանը, հետազոտական ունակությունների ձևավորմանը, ինչպես նաև՝ մաթեմատիկական խոսքի կուլտուրայի զարգացմանը:

Գիրքը նախատեսված է մասնագիտացված դպրոցների, բնագիտամաթեմատիկական թեքումով 9-րդ դասարանի սովորողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցիչներին՝ արտադասարանական պարապմունքներ անցկացնելու, ինչպես նաև աշակերտներին՝ մաթեմատիկական օլիմպիադաներին նախապատրաստվելու համար:

§1. ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ ՏԵՍԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹԻ ՀԱՄԱՌՈՏ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆ

1. Բաժանում առանց մնացորդի և մնացորդով

Դիցուք, a-ն և b-ն բնական թվեր են:

Ասում են, որ a թիվը **բաժանվում է** b թվի, եթե գոյություն ունի այնպիսի բնական q թիվ, որ $a=bq$ (բաժանում առանց մնացորդի):

Այդ դեպքում a-ն կոչվում է b-ի **բազմապատիկ**, իսկ b-ն՝ a-ի բաժանարար: Այն փաստը, որ a-ն բաժանվում է b-ի, համառոտ գրառում են՝ $a \vdots b$: Նշենք այդ առնչության հիմնական հատկությունները.

1) Ցանկացած a բնական թվի դեպքում $a \vdots b$:

2) Ցանկացած a բնական թվի դեպքում $a \vdots 1$:

3) Եթե $a \vdots b$, $b \vdots c$, ապա $a \vdots c$:

4) Եթե $a \vdots b$ և $c \vdots b$, ապա $(a+c) \vdots b$, $(a-c) \vdots b$:

5) Եթե $a \vdots b$ և $c \in N$, ապա $(a \cdot c) \vdots b$:

6) Եթե $a \vdots b$ և $c \vdots d$, ապա $ac \vdots bd$:

Ցանկացած բնական a թվի համար ընդունվում է, որ $0 \vdots a$:

Ձևակերպենք մնացորդով բաժանման սահմանումը.

a բնական թիվը բաժանել b բնական թվի վրա, նշանակում է՝ գտնել այնպիսի q և r ամբողջ թվեր, որ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները՝

$$a=bq+r, \ 0 \le r < b:$$

Այստեղ q-ն կոչվում է **քանորդ**, իսկ r-ը՝ **մնացորդ**:

Կարելի է ապացուցել, որ ցանկացած a և b բնական թվերի համար իրագործելի է մնացորդով բաժանումը, ընդ որում՝ միակ ձևով:

Ցանկացած բնական թիվ տրված n բնական թվի բաժանելիս ստացված մնացորդը

$$0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ n-1$$

թվերից մեկն է: Այդ նշանակում է, որ յուրաքանչյուր բնական թիվ կարելի է ներկայացնել

$$nq,\ nq+1,\ nq+2,\ \ldots,\ nq+(n-1)$$

տեսքերից մեկով, որտեղ $q \in Z_0$: Օրինակ, յուրաքանչյուր բնական թիվ կարելի է ներկայացնել $3q$, $3q+1$, $3q+2$ տեսքերից մեկով:

Համանմանորեն, յուրաքանչյուր բնական թիվ կարելի է ներկայացնել $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ $(k \in Z_0)$ տեսքերից մեկով:

Ընդունված է $2k$ $(k \in Z_0)$ տեսքի թվերն անվանել զույգ, իսկ $2k-1$ $(k \in N)$ տեսքի թվերը՝ **կենտ:** Զույգ և կենտ թվերի միավորումը ոչբացասական ամբողջ թվերի բազմությունն է:

2. Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկ

Դիցուք, a-ն և b-ն բնական թվեր են: Այդ թվերի **ընդհանուր բաժանարար** կոչվում է այն բնական թիվը, որի վրա միաժամանակ բաժանվում են a և b թվերը:

a և b թվերի ընդհանուր բաժանարարներից ամենամեծն անվանում են a և b թվերի **ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար** և նշանակում են՝ $(a;b)$:

Եթե $(a;b)=1$, ապա ասում են, որ a և b բնական թվերը **փոխադարձաբար պարզ** են:

Համանմանորեն, կարելի է ներմուծել երեք և ավելի բնական թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի հասկացությունը:

Երկու բնական թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու համար հարմար է օգտվել, այսպես կոչված, **Էվկլիդեսի ալգորիթմից,** որի հիմքում ընկած է հետևյալ պնդումը՝

Եթե a թիվը b-ի բաժանելիս ստացվում է r մնացորդ, ապա

$$(a;b)=(b;r):$$

Դիցուք, տրված են a և b բնական թվերը: Եթե a-ն բաժանվում է b-ի (առանց մնացորդի), ապա ակնհայտ է, որ $(a;b)=b$: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ a-ն b-ի բաժանելիս ստացվում է զրոյից տարբեր r մնացորդ: b-ն բաժանենք r-ի և r_1-ով նշանակենք այդ բաժանումից ստացված մնացորդը և այդպես շարունակ՝ յուրաքանչյուր անգամ նախորդ բաժանարարը բաժանելով ստացված մնացորդի վրա: Այդ պրոցեսը շարունակվում է այնքան, քանի դեռ չի ստացվել զրո մնացորդ: Վերջին՝ զրոյից տարբեր մնացորդն էլ հենց կլինի a և b թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը:

a և b բնական թվերից յուրաքանչյուրի վրա բաժանվող բնական թիվն անվանում են a և b թվերի **ընդհանուր բազմապատիկ**: Այդպիսի թվերից ամենափոքրը կոչվում է a և b թվերի **ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկ** և նշանակվում է՝ $[a;b]$: Համանմանորեն սահմանվում է նաև երեք և ավելի բնական թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի հասկացությունը: Ճիշտ է հետևյալ պնդումը՝

$$[a;b]=\frac{ab}{(a;b)}:$$

Խնդիրներ լուծելիս հաճախ են կիրառվում հետևյալ թեորեմները.

1) Երկու փոխադարձաբար պարզ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հավասար է դրանց արտադրյալին: Այլ կերպ ասած, եթե $(a;b)$ = 1, ապա $[a;b]=a\cdot b$

2) Եթե a-ն և b-ն փոխադարձաբար պարզ թվեր են, ապա a-ի և b-ի բաժանվող յուրաքանչյուր բնական թիվ բաժանվում է նաև ab-ի:

3) Եթե a և b թվերը փոխադարձաբար պարզ են և ac ($c\in N$) արտադրյալը բաժանվում է b-ի, ապա c-ն բաժանվում է b-ի:

Դիտողություն: Այսուհետ բնական թվի բաժանարար ասելով ամենուրեք հասկացվում է, որ այն բնական թիվ է:

3. Պարզ և բաղադրյալ թվեր

Բնական p թիվը կոչվում է **պարզ**, եթե այն ունի ճիշտ երկու աժանարար (1-ը և p-ն):

Երեք և ավելի բաժանարար ունեցող բնական թվերը կոչվում են **բաղադրյալ:**

1 թիվը ո՛չ պարզ է և ո՛չ էլ՝ բաղադրյալ (այն ունի միայն մեկ բաժանարար):

2-ից տարբեր բոլոր պարզ թվերը կենտ են: Պարզ թվերի քանակն անվերջ է: (տես N 76 խնդիրը)

Խնդիրներ լուծելիս օգտակար կլինեն հետևյալ պնդումները.

1) Եթե p-ն պարզ թիվ է, ապա ցանկացած n բնական թիվ կա՛մ բաժանվում է p-ի, կա՛մ փոխադարձաբար պարզ է p-ի հետ:

2) Երկու բնական թվերի արտադրյալը կբաժանվի p պարզ թվի այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ թվերից գոնե մեկը բաժանվում է p-ի:

3) Յուրաքանչյուր $n \neq 1$ բնական թիվ կա՛մ պարզ է, կա՛մ պարզ թվերի արտադրյալ է:

4) 1-ից մեծ յուրաքանչյուր բնական թիվ կարելի է ներկայացնել պարզ թվերի արտադրյալի տեսքով, ընդ որում՝ միակ ձևով (թվաբանության հիմնական թեորեմը): Այստեղ արտադրյալները համարվում են նույնը, եթե նրանք տարբերվում են միայն արտադրիչների կարգով:

Թվաբանության հիմնական թեորեմն ունի մի շարք կարևոր հետևանքներ: Թվարկենք դրանցից երեքը.

ա) Բնական թվի՝ 1-ից տարբեր ամենափոքր ընդհանուր բաժանարարը պարզ թիվ է:

բ) 1-ից բացի յուրաքանչյուր բնական թիվ ունի առնվազն մեկ պարզ բաժանարար:

գ) Բաղադրյալ n թվի՝ 1-ից տարբեր ամենափոքր ընդհանուր բաժանարարը (այսինքն՝ ամենափոքր պարզ բաժանարարը) չի գերազանցում $\sqrt{n}$-ը:

Վերջին երեք պնդումներից օգտվում են հատկապես այն դեպքում, երբ ստուգվում է որևէ n բնական թվի պարզ կամ բաղադրյալ լինելը, ընդ որում՝ պարզ բաժանարարները փնտրվում է ոչ թե n-ը չգերազանցող բոլոր պարզ թվելի մեջ, այլ՝ $\sqrt{n}$-ը չգերազանցող պարզ թվերի մեջ:

Թվաբանության հիմնական թեորեմից հետևում է, որ **ցանկացած $n \neq 1$ բնական թիվ կարելի է ներկայացնել $p_1\ p_2\ \dots\ p_m$ տեսքով, որտեղ p_1, p_2, ..., p_m թվերը պարզ են:**

Նման դեպքում ասում են, որ n թիվը **վերածվել է պարզ բազմապատկիչների արտադրյալի:** Քանի որ բազմապատկիչները կարող են կրկնվել, ուստի հարմար է այն ներկայացնել

$$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}$$

տեսքով, որտեղ p_1, p_2, ..., p_k-ն իրարից տարբեր պարզ թվեր են, իսկ ցուցիչները բնական թվեր: Ընդունված է վերջին գրելաձևն անվանել n **թվի կանոնական վերլուծություն:**

Բնական թվերի կանոնական վերլուծությունը հնարավորություն է տալիս հեշտությամբ լուծել նրանց հետ կապված շատ հարցեր (օրինակ, երկու թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կամ ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնելը):

Ընդունված է n թվի բոլոր բնական բաժանարարների քանակը նշանակել $\tau(n)$-ով: Կարելի է ապացուցել, որ (տես N 74 խնդիրը)

$$\tau(n) = (1+m_1)\cdot(1+m_2)\cdot\ldots\cdot(1+m_k):$$

4. Բաժանելիության հայտանիշները

Երբեմն անհրաժեշտություն է առաջանում առանց բաժանման գործողություն կատարելու բացահայտել, թե տասնորդական գրառմամբ ներկայացված թիվը բաժանվու՞մ է արդյոք տրված b բնական թվի վրա: Ստորև ձևակերպված պնդումները (հայտանիշները) հնարավորություն կտան մասնակիորեն պատասխանել այդ հարցին:

$m=\overline{a_n\, a_{n-1}...a_1a_0}$ գծիկը ցույց է տալիս, որ դա արտադրյալ չէ, այլ թվի տասնորդական գրելաձև) թիվը երբեմն հարմար է ներկայացնել

$$10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + ... + 10 \cdot a_1 + a_0$$

գումարի տեսքով (օրինակ, $\overline{ab}=10a+b$, $\overline{abc}=100a+10b+c$, 2548 =2·1000+5·100+4·10+ 8 և այլն):

1) Բնական m թիվը բաժանվում է 2-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ դրա տասնորդական գրառումը վերջանում է 0, 2, 4, 6, 8 թվանշաններից մեկով (այսինքն՝ վերջին նիշն արտահայտող թիվը զույգ է):

2) Բնական m թիվը բաժանվում է 5-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ դրա տասնորդական գրառումը վերջանում է 0 կամ 5 թվանշանով:

3) Որպեսզի բնական թիվը բաժանվի 4-ի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն կա'մ վերջանա 00; 02; 04; 08 -ով, կա'մ էլ 4-ի վրա բաժանվի վերջին երկու թվանշաններով կազմված երկնիշ թիվը:

4) $m=\overline{a_na_{n-1}...a_1a_0}$ թիվը բաժանվում է 3-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ 3-ի վրա է բաժանվում $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ գումարը (թվանշաններն արտահայտող թվերի գումարը):

5) $m=\overline{a_na_{n-1}...a_1a_0}$ թիվը բաժանվում է 9-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ 9-ի վրա է բաժանվում $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ գումարը (թվանշաններն արտահայտող թվերի գումարը):

6) Եթե բնական թվի տասնորդական գրառման մեջ զույգ տեղերում գտնվող բոլոր թվանշանների գումարի և կենտ տեղերում գրված բոլոր թվանշանների գումարի տարբերության մոդուլը բաժանվում է 11-ի, ապա այդ թիվը ևս կբաժանվի 11-ի: Հակառակ դեպքում տրված թիվը 11-ի բազմապատիկ չէ:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. Ապացուցել, որ եթե n-ը կենտ թիվ է, ապա n^2-1-ը բաժանվում է 8-ի:

2. Ապացուցել, որ ցանկացած երկու կենտ թվերի քառակուսիների տարբերությունը բաժանվում է 8-ի:

3. Ապացուցել, որ ցանկացած երեք հաջորդական ամբողջ թվերի արտադրյալը բաժանվում է 6-ի:

4. Ապացուցել, որ k^3-k թիվը բաժանվում է 6-ի, որտեղ $k \in Z_0$:

5. Ապացուցել, որ k^3+5k թիվը բաժանվում է 6-ի, որտեղ $k \in Z_0$:

6. Ապացուցել, որ իրար հաջորդող ցանկացած երեք բնական թվերի խորանարդների գումարը բաժանվում է 9-ի:

7. Հայտնի է, որ x^2-y^2 թիվը զույգ է $(x,\ y \in Z_0,\ x \geq y)$: Ապացուցել, որ այն 4-ի բազմապատիկ է:

8. Ապացուցել, որ երկու կենտ թվերի քառակուսիների գումարը չի կարող լինել բնական թվի քառակուսի:

9. 4-ի վրա բաժանելիս ի՞նչ մնացորդ կարող են տալ $4k-1$ $(k \in N)$ տեսքի թվերը:

10. Հետևյալ պնդումներից ո՞րն է ճիշտ.

ա) եթե թիվը բաժանվում է և՛5-ի և՛ 9-ի, ապա այն բաժանվում է 45-ի;

բ) եթե թիվը բաժանվում է և՛6-ի և՛ 15-ի, ապա այն բաժանվում է 90-ի;

գ) եթե թիվը բաժանվում է 3-ի կամ 7-ի, ապա այն բաժանվում է 21-ի:

11. Հետևյալ պնդումներից ո՞րն է ճիշտ (պատասխանը հիմնավորել),

ա) ցանկացած չորս հաջորդական ամբողջ թվերի գումարը բաղադրյալ է;

բ) $6k-1$ տեսքի ցանկացած թիվ պարզ է $(k \in N)$;

գ) 8^n-1 տեսքի ցանկացած թիվ բաղադրյալ է $(n \in N)$;

դ) 11^n-3^n տեսքի ցանկացած թիվ բաղադրյալ է $(n \in N)$ ։

12. Գտնել (n^2+5n-1)-ը $(n+5)$-ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդը $(n \in N)$ ։

13. Գտնել բոլոր բնական n թվերը, որոնց դեպքում n^2+3n+6 թիվը բաժանվում է $(n+1)$ -ի։

14. Գտնել $\overline{34x5y}$ տեսքի բոլոր այն հնգանիշ թվերը, որոնք բաժանվում են 36-ի։

15. 43 թվի ձախից և աջից կցագրել մեկական թվանշան այնպես, որ ստացված քառանիշ թիվը բաժանվի 45 -ի։ Պատասխանում նշել բոլոր այդպիսի քառանիշ թվերը։

16. 200 հատ 2-ներով գրված թիվը 3-ի բաժանելիս ի՞նչ մնացորդ կտա։

17. Բնական թիվը 2-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ, իսկ 3-ի բաժանելիս՝ 2 մնացորդ։ Ի՞նչ մնացորդ կտա այդ թիվը 6-ի բաժանելիս։

18. Ապացուցել, որ գոյություն չունի այնպիսի ամբողջ k թիվ, որ k^2+1 թիվը լինի 3-ի բազմապատիկ։

19. Ապացուցել, որ եթե m բնական թիվը չի բաժանվում 5-ի, ապա m^4-1 թիվը բաժանվում է 5-ի։

20. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական k-ի դեպքում $2k^3+3k^2+k$ թիվը բաժանվում է 6-ի։

21. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական k թվի դեպքում k^5-k թիվը 5-ի բազմապատիկ է:

22. Ապացուցել, որ եթե k^2+m^2 թիվը 3-ի բազմապատիկ է, ապա k-ն և m-ը ևս 3-ի բազմապատիկ են $(k,\ m\in Z_0)$:

23. Ապացուցել նույնությունը՝

ա) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$, որտեղ $n\in N$:

բ) $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+...-ab^{n-2}+b^{n-1})$, որտեղ n-ը կենտ թիվ է:

26. Օգտվելով նախորդ խնդրի արդյունքից, ապացուցել, որ.

ա) $(a^n-b^n)\vdots(a-b)$, որտեղ $n\in N$, $a\in N$, $b\in N$, $a>b$:

բ) $(a^n+b^n)\vdots(a+b)$, որտեղ n-ը կենտ թիվ է, $a\in N$, $b\in N$:

27. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում.

ա) $(7^n-4^n)\vdots3$, բ) $(9^n-1)\vdots8$, գ) $(12^{2n+1}+13^{2n+1})\vdots25$:

28. Ապացուցել, որ.

ա) $(3^{30}+7^{30})\vdots58$, բ) $(9^{16}-4^{24})\vdots17$, գ) $(2^{28}+5^{28})\vdots641$:

29. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում

$$(5^{6n+3}+7^{6n+3})\vdots39:$$

30. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում $5^{2n}+23^{2n+1}$ թիվը 24-ի բազմապատիկ է:

31. Գտնել 111... 11 (100 հատ 1-եր) թիվը 9-ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդը:

32. Ապացուցել, որ բնական թիվը 3-ի բաժանելիս տալիս է նույն մնացորդը, ինչ այդ թվի թվանշաններն արտահայտող թվերի գումարը:

33. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$ արտահայտության արժեքը բնական թիվ է:

34. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական a թվի դեպքում a^5-5a^3+4a թիվը բաժանվում է 120-ի:

35. Ապացուցել, որ $5n-3$ $(n\in N)$ տեսքի բնական թվերից ոչ մեկը չի կարող լինել բնական թվի քառակուսի:

36. Ապացուցել, որ եթե n-ը և 6-ը փոխադարձաբար պարզ են, ապա n^2-1 թիվը բաժանվում է 24-ի:

37. Երկու կենտ թվերի տարբերությունը 32 է: Ապացուցել, որ այդ թվերը փոխադարձաբար պարզ են:

38. Ապացուցել, որ $3k-1$ $(k\in N)$ տեսքի թվերի մեջ չկա բնական թվի քառակուսի:

39. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում.

ա) $(n;\ n+1)=1$; բ) $(4n+3;\ 5n+4)=1$;

գ) $(2n-1;\ 2n+1)=1$; դ*) $\left(\frac{n(n+1)}{2};\ 2n+1\right)=1$:

40. Ապացուցել, որ բնական թվերի շարքում 2-ից մեծ ցանկացած պարզ թիվ $4k-1$ կամ $4k+1$ տեսքի է $(k\in N)$: Ճի՞շտ է արդյոք հակադարձ պնդումը:

41. Ապացուցել, որ 3-ից մեծ ցանկացած պարզ թիվ $6k-1$ կամ $6k+1$ տեսքի է $(k\in N)$: Ճի՞շտ է արդյոք հակադարձ պնդումը:

42. Նշել այնպիսի բնական n թիվ, որ (n^2+n+41)-ը լինի բաղադրյալ թիվ: Ապացուցել, որ գոյություն ունեն անվերջ շատ այդպիսի թվեր:

43. Գտնել բոլոր այն բնական n թվերը, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում նշված թիվը պարզ է՝

ա) n^2-64, բ) $n^2+8n-48$, գ*) n^4+n^2+1:

44*. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում n^4+3n^2+4 արտահայտությունը բաժանվում է (n^2+n+2)-ի:

45*. Ապացուցել, որ ցանկացած ամբողջ m-ի դեպքում m^4+3m^2+4 թիվը բաղադրյալ է:

46. Ապացուցել, որ ցանկացած կենտ թիվ կարելի է ներկայացնել երկու բնական թվերի քառակուսիների տարբերության տեսքով:

47. Ապացուցել, որ ցանկացած չորս հաջորդական բնական թվերի արտադրյալը 1-ով մեծացրած, լրիվ քառակուսի է:

48*. Գոյություն ունի՞ այնպիսի բնական n թիվ, որի դեպքում n^2+3n+1 թիվը լինի լրիվ քառակուսի:

49. Ապացուցել, որ եթե a-ն և b-ն փոխադարձաբար պարզ են, ապա a^2 և b^2 թվերը ևս փոխադարձաբար պարզ են, այսինքն՝ $(a;b)=1 \Rightarrow (a^2;b^2)=1$:

50*. Ապացուցել, որ եթե երկու բնական թվերից յուրաքանչյուրը երկու ամբողջ թվերի քառակուսիների գումար է, ապա այդ թվերի արտադրյալը նույնպես կարող է ներկայացվել երկու ամբողջ թվերի քառակուսիների գումարի տեսքով:

51. Ապացուցել, որ եթե n-ը երկու ամբողջ թվերի քառակուսիների գումար է, ապա $2n$-ը նույնպես կարելի է ներկայացնել երկու ամբողջ թվերի քառակուսիների գումարի տեսքով:

52. Ապացուցել, որ 99...9 տեսքի (միայն՝ 9-երով) թվերից միայն մեկը կարելի է ներկայացնել երկու ամբողջ թվերի քառակուսիների գումարի տեսքով: Ո՞ր թիվն է դա:

53*. Դիտարկենք բոլոր այն բնական թվերը, որոնք կազմված են զույգ քանակով միևնույն թվանշաններից: Ապացուցել, որ այդ թվերից միայն մեկն է պարզ: Ո՞ր թիվն է դա:

54. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n թվի համար կարելի է ընտրել այնպիսի բնական x թիվ, որ $nx+1$-ը լինի բաղադրյալ:

55*. Ապացուցել, որ ցանկացած $p(p>2)$ պարզ թիվ միակ ձևով կարելի է ներկայացնել երկու բնական թվերի քառակուսիների տարբերության տեսքով: Ո՞ր թվերն են դրանք:

56. Տրված են $a=2^5\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 11$, $b=2^4\cdot 3^6\cdot 5\cdot 7^2$: Գտնել՝

ab-ն, $(a;b)$-ն և $[a:b]$-ն:

57. Թիվը ներկայացնել կանոնական տեսքով.

ա) 10085, բ) 18765, գ) 10!:

58. Քանի՞ բնական բաժանարար ունի նշված թիվը.

ա) $3\cdot 7\cdot 11\cdot 19$, բ) $5^3\cdot 7^4$, գ) $9^3\cdot 15^4$, դ) 2017, ե) $10!$:

59*. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական k-ի դեպքում k^2 թվի բոլոր բնական բաժանարարների քանակը կենտ է: Ապացուցել նաև հակադարձ պնդումը:

60*. Ինչպիսի՞ բնական n-երի դեպքում է 2^n-1 թիվը բաժանվում 7-ի:

61*. Քանի՞ զրոյով է վերջանում 2000! թիվը:

62*. Դիցուք՝ p-ն պարզ թիվ է: Ապացուցել, որ $8p^2+1$ թիվը պարզ կլինի այն և միայն այն դեպքում, երբ $p=3$:

63*. Գտնել բոլոր p պարզ թվերը, որոնց դեպքում p^2+4 և p^2+6 թվերը ևս պարզ են:

64*. Գտնել բոլոր p պարզ թվերը, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում $6p^2+1$-ը և $4p^2+1$-ը ևս պարզ թվեր են:

65. Ապացուցել, որ ցանկացած $m \geq 2$ բնական թվի դեպքում $m!+2, m!+3, ..., m!+m$ թվերից յուրաքանչյուրը բաղադրյալ է:

66. Ապացուցել, որ 2-ից մեծ ցանկացած բնական n-ի դեպքում $n!-1$ թիվը $2, 3, ..., n$ թվերից յուրաքանչյուրի հետ փոխադարձաբար պարզ է:

67*. Ելնելով նախորդ խնդրի պնդումից, ապացուցել, որ n և $n!$ $(n \geq 2)$ բնական թվերի միջև գոյություն ունի առնվազն մեկ պարզ թիվ:

68*. Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n-ի համար կգտնվի այնպիսի բնական x թիվ, որ $x+1$, $x+2$, ... , $x+n$ թվերի մեջ չի լինի ոչ մի պարզ թիվ: Այլ կերպ՝ ցանկացած բնական n-ի համար բնական թվերի շարքում կարելի է ընտրել միմյանց հաջորդող n թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրը բաղադրյալ է:

69*. Ո՞ր բնական n-երի դեպքում $4n^2+9n+1$ արտահայտության արժեքը կլինի բնական թվի քառակուսի:

70*. Ո՞ր բնական n-երի դեպքում $n^3+5n^2+11n+10$ արտահայտության արժեքը կլինի բնական թվի խորանարդ:

71*. m և n $(m > n)$ բնական թվերն այնպիսին են, որ m-ը չի բաժանվում n-ի, ընդ որում, m-ը n-ի բաժանելիս ստացվում է նույն մնացորդը, ինչ՝ $(m+n)$-ը $(m-n)$-ի բաժանելիս: Գտնել $\frac{m}{n}$ հարաբերությունը:

72*. Ապացուցել, որ $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2000}\right) \cdot 2000!$ թիվն ամբողջ է և բաժանվում է 2001-ի:

73. Ապացուցել հավասարությունը՝

$$\underbrace{(33...33)^2}_{n \text{ հատ } 3} + \underbrace{22...22}_{n \text{ հատ } 2} = \underbrace{11...11}_{2n \text{ հատ } 1}:$$

74*. Բնական n թիվը ներկայացված է կանոնական տեսքով՝

$$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}:$$

Ապացուցել, որ n թվի բոլոր բաժանարարների քանակը՝

$$\tau(n) = (1 + m_1)(1 + m_2) \ldots (1 + m_k):$$

75*. Ելնելով նախորդ խնդրի արդյունքից, ապացուցել հետևյալ պնդումը՝ բնական թիվը լրիվ քառակուսի է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա բաժանարարների քանակը կենտ է:

76*. Ապացուցել, որ պարզ թվերի քանակն անվերջ է:

77*. Ապացուցել, որ գոյություն ունեն անվերջ շատ պարզ թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի $3n + 2$ $(n \in N)$ տեսքը:

78*. Ապացուցել, որ գոյություն ունեն անվերջ շատ պարզ թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի $4n + 3$ $(n \in N)$ տեսքը:

79*. Ապացուցել, որ գոյություն ունեն անվերջ շատ պարզ թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի $6n + 5$ $(n \in N)$ տեսքը:

80*. Ապացուցել, որ եթե n-ը բաղադրյալ թիվ է, ապա $2^n - 1$ թիվը նույնպես բաղադրյալ է:

81*. Ապացուցել, որ $2^{2^n} + 1$ $(n \in N)$ տեսքի՝

$$2^2 + 1,\quad 2^4 + 1,\quad 2^8 + 1,\quad \ldots,\quad 2^{2^n} + 1,\quad \ldots$$

թվերից ցանկացած երկուսը փոխադարձաբար պարզ են:

§ 2. ԲԱՂԴԱՏՈՒՄՆԵՐ: ՖԵՐՄԱՅԻ ՓՈՔՐ ԹԵՈՐԵՄԸ

Համառոտ տեղեկություն

Ամբողջ թվերի բաժանելիության շատ հարցեր քննարկելիս երբեմն օգտակար են դառնում այն հատկությունները, որոնք հնարավորություն են տալիս որոշ արտահայտություններ (ամբողջ թվեր) փոխարինել նրանց՝ այս կամ այն բնական թվի բաժանելիս ստացված մնացորդներով, այնուհետև գործողություններն իրականացնել մնացորդների հետ: Պատահական չէ, որ մաթեմատիկայի պատմության ընթացքում, ամբողջ թվերի տեսության մեջ, առաջացել է մի բաժին, որը կոչվում է **մնացորդների թվաբանություն:** Այդ տեսության հիմնադիրը գերմանացի մաթեմատիկոս Ֆրիդրիխ Գաուսն է (18-րդ դարի վերջ, 19-րդ դարի սկիզբ): Համառոտ նկարագրենք այն գաղափարները, որոնք ընկած են «Մնացորդների թվաբանության» հիմքում:

Յուրաքանչյուր բնական թիվ տրված m բնական թվի բաժանելիս ստացված մնացորդը

$$0;\ 1;\ \ 2;\ \ldots;\ m-2;\ m-1$$

թվերից մեկն է (հնարավոր մնացորդների քանակը m է):

Այս նկատառումով, ոչբացասական ամբողջ թվերի բազմությունը տրոհվում է m խմբի (դասի).

$$mk;\ \ mk+1;\ \ mk+2;\ldots;\ \ mk+m-1$$

ընդհանուր տեսքերով, որտեղ k-ն ցանկացած ոչբացասական ամբողջ թիվ է:

Եթե a և b բնական թվերը m-ի բաժանելիս տալիս են միևնույն մնացորդը, այսինքն՝ պատկանում են միևնույն դասին, ապա ասում են, որ այդ թվերը **բաղդատելի են ըստ մոդուլ** m-ի և գրառում են՝

$$a \equiv b (\bmod m):$$

Կարդացվում է այսպես. «a-ն բաղդատելի է b-ի հետ ըստ մոդուլ m-ի»:

Որպես օրինակ վերցնենք m=6: Ոչբացասական ամբողջ թվերի բազմությունը տրոհվում է վեց դասերի՝ ըստ մոդուլ 6-ի.

$$6k;\ \ 6k+1;\ \ 6k+2;\ \ 6k+3;\ \ 6k+4;\ \ 6k+5$$

Օրինակ, 26-ը և 74-ը $6k+2$ տեսքի են, ուստի այդ թվերը պատկանում են միևնույն դասի և բաղդատելի են ըստ մոդուլ 6-ի՝

$$74\equiv 26(\mathrm{mod}\,6):$$

$6\cdot 5^{20}+4$ և 10 թվերը պատկանում են $6k+4$ տեսքի թվերի բազմությանը, ուստի՝

$$6\cdot 5^{20}+4\equiv 10(\mathrm{mod}\,6):$$

Ձևակերպենք բաղդատումների վերաբերյալ հիմնական հատկությունները, որոնց ապացուցումները դժվարություն չեն ներկայացնում (կատարեք ինքնուրույն).

1) a **և** b **թվերը բաղդատելի են ըստ մոդուլ** m **-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ** $a-b$ **տարբերությունը բաժանվում է** m **-ի:**

2) Ցանկացած a **ամբողջ թվի և** m **բնական թվի համար**

$$a\equiv a(\mathrm{mod}\,m)\ :$$

3) Եթե $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$, **ապա** $b\equiv a(\mathrm{mod}\,m)$:

4) Եթե $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ **և** $b\equiv c(\mathrm{mod}\,m)$, **ապա** $a\equiv c(\mathrm{mod}\,m)$:

5) Եթե $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ **և** $c\equiv d(\mathrm{mod}\,m)$, **ապա.**

ա) $a+c\equiv b+d(\mathrm{mod}\,m)$, **բ)** $a-c\equiv b-d(\mathrm{mod}\,m)$,

գ) $ac\equiv bd(\mathrm{mod}\,m)$, **դ)** $a^k\equiv b^k(\mathrm{mod}\,m),\ k\in N$:

6) Եթե $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$, **ապա ցանկացած** c **ամբողջ թվի համար.**

ա) $a+c\equiv b+c(\mathrm{mod}\,m)$, **բ)** $ac\equiv bc(\mathrm{mod}\,m)$:

7) Եթե $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ **և** d **-ն** a **և** b **թվերի ընդհանուր բաժանարար է, ընդ որում** d **-ն և** m **-ը փոխադարձաբար պարզ են, ապա**

$$\frac{a}{d}\equiv\frac{b}{d}(\mathrm{mod}\,m):$$

Բերենք օրինակներ:

Օրինակ 1. Գտնել 2^{102}-ը 17-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:

Լուծում. Ակնհայտ է, որ

$$2^4 \equiv -1(\mathrm{mod}\,17):$$

Երկու մասերը բարձրացնենք 25 աստիճան (տե՛ս հատկություն 5, դ).

$$2^{100} \equiv 1(\mathrm{mod}\,17):$$

Այժմ, ստացված բաղդատման երկու մասերը բազմապատկենք 2^2-ով (տե՛ս հատկություն 6, բ).

$$2^{102} \equiv 4(\mathrm{mod}\,17):$$

Վերջին առնչությունը ցույց է տալիս, որ 2^{102}-4 տարբերությունը բաժանվում է 17-ի: Նշանակում է՝ 2^{102}-ը 17-ի բաժանելիս ստացվում է 4 մնացորդ:

Օրինակ 2. Գտնել 2^{341}-ը 341-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:

Լուծում. Օգտվենք հետևյալ ակնհայտ բաղդատումից՝

$$2^{10} \equiv 1(\mathrm{mod}\,1023):$$

Քանի որ 2^{10}-1=1023=3·341, ուստի $(2^{10}-1)\vdots 341$, նշանակում է՝

$$2^{10} \equiv 1(\mathrm{mod}\,341):$$

Ստացված բաղդատման երկու մասերը բարձրացնելով 34 աստիճան, կստանանք՝

$$2^{340} \equiv 1(\mathrm{mod}\,341):$$

Մնում է վերջին բաղդատման երկու մասերը բազմապատկել 2-ով: Ստանում ենք՝

$$2^{341} \equiv 2(\mathrm{mod}\,341):$$

Վերջին առնչությունից էլ հետևում է, որ որոնելի մնացորդը 2-ն է:

Օրինակ 3. Ապացուցել, որ $2^{32}+1$ թիվը բաժանվում է 641-ի:

Լուծում. Նկատենք, որ 641=640+1=5·2^7+1:

Նշանակում է՝ $5\cdot 2^7 \equiv -1(\mathrm{mod}\,641):$

Այս բաղդատման երկու մասերը բարձրացնելով 4 աստիճան, կստանանք՝

$$5^4 \cdot 2^{28} \equiv 1(\bmod 641)$$

Այնուհետև նկատենք, որ $5^4 = 625 = 641-16$:

Հաշվի առնելով այդ՝ (1)-ը կներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$641 \cdot 2^{28} - 2^{32} \equiv 1(\bmod 641):$$

Ստացվում է, որ

$$(641 \cdot 2^{28} - 2^{32}) - 1$$

թիվը բավանվում է 641-ի, որից էլ հետևում է, որ

$$(2^{32}+1) \vdots 641:$$

Այն, ինչ պետք էր ապացուցել:

Օրինակ 4. Ապացուցել, որ a և b բնական թվերի համար, որտեղ $a > b$, ինչպիսի բնական n թիվ էլ լինի

$$(a^n - b^n) \vdots (a-b):$$

Լուծում. Ակնհայտ է, որ

$$a \equiv b(\bmod(a-b):$$

Երկու մասերը բարձրացնելով n աստիճան, կստանանք՝

$$a^n \equiv b^n(\bmod(a-b)):$$

Իսկ դա նշանակում է, որ

$$(a^n - b^n) \vdots (a-b):$$

Օրինակ, ցանկացած n բնական թվի դեպքում՝

$$(13^n - 4^n) \vdots 9,\ (27^n - 1) \vdots 26,\ (37^n - 29^n) \vdots 8:$$

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

Օգտվելով բաղդատումներից ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում պնդումը ճիշտ է (1-8).

1. $(8^n-1)\vdots 7$: **2.** $(11^n-7^n)\vdots 4$:

3. $(5^{2n}-2^{2n})\vdots 21$: **4.** $(53^n-15^n)\vdots 19$:

5. $(27^{2n-1}+13^{2n-1})\vdots 40$: **6.** $(2^{4n+2}+3^{4n+2})\vdots 13$:

7. $(2^{6n+3}+3^{6n+3})\vdots 35$: **8.** $(9\cdot 81^n+13\cdot 169^n)\vdots 22$:

Ի՞նչ մնացորդ կստացվի a թիվը b -ի բաժանելիս (9-16).

9. $a=2^{24}$, $b=7$: **10.** $a=2^{40}$, $b=9$:

11. $a=3^{30}$, $b=28$: **12.** $a=33^{44}$, $b=10$:

13. $a=7^{39}$, $b=50$: **14.** $a=5^{29}$, $b=28$:

15. $a=6^{51}$, $b=217$: **16.** $a=22^{34}$, $b=13$:

Ապացուցել պնդումը (17-35).

17. $(8^{23}+15^{23})\vdots 23$: **18.** $(9^{26}-5^{26})\vdots 56$:

19. $(3^{28}+4^{21})\vdots 145$: **20.** $(4^{34}+7^{34})\vdots 65$:

21. $(20^{21}+1)\vdots 8001$: **22.** $(2^{36}+3^{36})\vdots 97$:

23. $(333^{444}+444^{333})\vdots 7$: **24.** $(10^9-7)\vdots 17$:

25. $(10^{16}-1)\vdots 51$: **26.** $(11^{20}-1)\vdots 200$:

27. $(2^{341}-2)\vdots 341$: **28.** $(2^{41}+1)\vdots 83$:

29. Ապացուցել, որ ցանկացած m բնական թվի դեպքում

$$\frac{10^{16m}-1}{3}$$

թիվն ամբողջ է և բաժանվում է 17-ի:

30. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում

$$18^n - n^{16}$$

թիվը 17-ի բազմապատիկ է:

31. Գտնել 333^{333} թվի վերջին թվանշանը:

32. Գտնել 51^{51}-ը 100-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:

33. Գտնել 2^{999} թվի վերջին երկու թվանշաններով արտահայտված երկնիշ թիվը:

34. Գտնել 2^{66} թվի վերջին երեք թվանշաններով արտահայտված եռանիշ թիվը:

35. Գտնել 5^{92}-ը 1222-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:

* * *

Թվերի տեսության մեջ առանձնահատուկ տեղ ունի մեծ կիրառություններ ունեցող հետևյալ թեորեմը՝

Եթե p-ն պարզ թիվ է, ապա ցանկացած a բնական թվի դեպքում $a^p - a$ թիվը բաժանվում է p-ի:

Այս թեորեմն առաջինը ձևակերպել է ֆրանսիացի իրավաբան, մաթեմատիկայի մեծ սիրահար Պյեռ Ֆերման[1] (1601-1665): Այն ստացել է <<**Ֆերմայի փոքր թեորեմը**>> անվանումը:

Ապացուցում: Ամենից առաջ նկատենք, որ եթե a բնական թիվը փոխադարձաբար պարզ է p պարզ թվի հետ, այսինքն՝ a-ն չի բաժանվում p-ի, ապա a թիվը p-ի բաժանելիս մնացորդում կստացվի

$$1, 2, 3, \dots, \quad p-1$$

---

[1] *Թեև Ֆերման մասնագիտությամբ իրավաբան էր, սակայն, իր տաղանդի շնորհիվ, նա գիտակ էր բազմաթիվ ոլորտների: Առանձնահատուկ հակումներ է ունեցել դեպի մաթեմատիկական գիտությունը և իր ժամանակի մեծ մասը տրամադրել է մաթեմատիկային: Հենց այդ բնագավառում էլ հասել է մեծ հաջողությունների, ստացել է բազմաթիվ նոր արդյունքներ, որոնցով էլ հանրահայտ է դարձել մաթեմատիկայի պատմության մեջ:*

թվերից որևէ մեկը:

Դիտարկենք

$$1\cdot a, 2a, 3a, \dots , \quad (p-1)a \qquad (1)$$

թվերը: Այդ թվերը p-ի բաժանելիս կստացվեն 0-ից տարբեր բոլոր հնարավոր մնացորդները $(1, 2, \dots , p-1)$: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ նրանցից ոչ մի երկուսը p-ի բաժանելիս չի կարող ստացվել միևնույն մնացորդը:

Իրոք, հակառակ դեպքում՝ եթե նրանցից որևէ երկուսը, ասենք, ka և $ma(m > k)$ թվերը p-ի բաժանելիս ստացվի նույն մնացորդը, ապա $ma - ka = (m-k)a$

թիվը բաժանվի p-ի: Քանի որ a -ն և p-ն փոխադարձաբար պարզ են, ուստի $m - k$ թիվը պետք է բաժանվի p-ի, որը հնարավոր չէ ($m - k < p$:) Ստացված հակասությունը հաստատում է վերը նշված պնդումը:

Դիցուք, (1) հաջորդականության $p-1$ թվերը p-ի բաժանելիս ստացվում են, համապատասխանաբար, $l_1, l_2, l_3, \dots , l_{p-1}$

մնացորդները (այդ թվերը 1, 2, 3, … $p-1$ թվերն են՝ այլ դասավորությամբ): Նշանակում է՝

$$1\cdot a \equiv l_1 (mod\, p),$$

$$2\cdot a \equiv l_2 (mod\, p),$$

$$- - - - - - - - -$$

$$- - - - - - - - -$$

$$(p-1)a \equiv l_n (mod\, p) \quad (n=p-1):$$

Բազմապատկելով ստացված $(p-1)$ բաղդատումները, կստանանք՝

$$1\cdot 2\cdot \dots \cdot (p-1)\, a^{p-1} \equiv l_1\, l_2 \dots l_{p-1}\, (mod\, p): \qquad (2)$$

Քանի որ $l_1\, l_2 \dots l_{p-1} - 1\cdot 2\cdot \dots \cdot (p-1)$ և $1\cdot 2\cdot \dots \cdot (p-1)$ թիվը փոխադարձաբար պարզ է p-ի հետ, ուստի (2) առնչությունից կունենանք՝

$$a^{p-1} \equiv 1 (mod\, p):$$

Իսկ դա նշանակում է, որ

$$(a^{p-1} - 1) \vdots p: \qquad (3)$$

Ակնհայտ է, որ եթե a -ն կամայական բնական թիվ է, ապա

$a(a^{p-1}-1)\,\vdots\, p$, այսինքն՝ $(a^p-a)\,\vdots\, p$:

«Ֆերմայի փոքր թեորեմն» ապացուցված է:

Քանի որ $a^p-a=a(a^{p-1}-1)$, ապա a -ի և p -ի փոխադարձ պարզ լինելու պայմանով Ֆերմայի փոքր թեորեմից հետևում է, որ $(a^{p-1}-1)\,\vdots\, p$:

Ստորև բերված խնդիրները լուծել Ֆերմայի փոքր թեորեմի կիրառմամբ.

36. Ապացուցել, որ $(23^{40}-1)\,\vdots\,41$:

37. Ապացուցել, որ $(9^{37}-9)\,\vdots\,37$:

38. Ապացուցել, որ $(4^{31}-4)\,\vdots\,124$:

39. Ապացուցել, որ $(4^{36}-1)\,\vdots\,323$:

40. Ապացուցել, որ $8^{22}-1$ թիվը աժանվում է և՛ 7-ի, և՛ 9-ի, և՛ 23-ի:

41. Ապացուցել, որ $7^{61}-1$ թիվը 61-ի բազմապատիկ է:

42. Ապացուցել, որ $3^{2016}-1$ թիվը 2017-ի բազմապատիկ է:

43. Բաժանվու՞մ է արդյոք $2^{1093}-2$ թիվը 1093-ի:

44. Բաժանվու՞մ է արդյոք $14^{100}+99$ թիվը 101-ի:

45. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում

$2^{4n+2}+7^{4n+2}+7^{52n}-1$ թիվը բաժանվում է 53-ի:

46*. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում

$9^{11n}+2^{5n}-3^{2n}-1$ թիվը բաղադրյալ է:

47*. Ապացուցել, որ ցանկացած p պարզ թվի համար գոյություն ունեն անվերջ շատ բնական n թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում 2^n-n թիվը բաժանվում է p -ի:

48*. a,b,c -ն բնական թվերն այնպիսին են, որ $a+b+c=2017$:

Ի՞նչ մնացորդ կարող է ստացվել $a^{17}+b^{17}+c^{17}$ արտահայտությունը 17-ի բաժանելիս:

§ 3. ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐՈՎ

Մեկից ավելի փոփոխական (անհայտ) պարունակող հավասարումների լուծումը բնական կամ ամբողջ թվերով մաթեմատիկական գիտության հնագույն խնդիրներից մեկն է: Այն կարևորվում է նաև ժամանակակից մաթեմատիկայում: Խնդիրը կայանում է հետևյալում. տրված հավասարման համար գտնել նրանում մասնակցող փոփոխականների բոլոր այն ամբողջ կամ բնական արժեքները, որոնց դեպքում այն վերածվում է ճիշտ հավասարության:

Մաթեմատիկայի պատմության մեջ բնական թվերով հավասարումների լուծումը կապված է Հին Հունական մաթեմատիկոս **Դիոֆանտի** (մ.թ. 3-րդ դար) անվան հետ: Այդպիսի հավասարումների լուծման ուղղությամբ Դիոֆանտը տարատեսակ հնարներ է իրագործել, որի համար էլ դրանք կոչվում են **դիոֆանտյան հավասարումներ**, երբեմն նաև՝ **անորոշ հավասարումներ**: Միաժամանակ պետք է նշել, որ դիոֆանտյան ոչ բոլոր հավասարումներն ունեն լուծման ընդհանուր ալգորիթմներ. մեծիմասամբ, գործնականորեն, յուրաքանչյուր հավասարման համար ցուցաբերվում է յուրատիպ մոտեցում:

Ժամանակակից մաթեմատիկայում դիոֆանտյան հավասարումները նշանակալից կիրառություններ ունեն և կազմում են առանձին, բացառապես հետաքրքիր բաժին, որը ներառված է թվերի տեսության դասընթացներում: Թվերի տեսությունում դիոֆանտյան շատ հավասարումների համար բացահայտված են լուծման հատուկ մեթոդներ:

Երկու՝ x և y փոփոխականներով **դիոֆանտյան գծային** հավասարումն ունի

$$ax+by=c \qquad (1)$$

տեսքը, որտեղ a,b,c -ն տրված ամբողջ թվերն են: Հարմարության համար կարելի է ընդունել, որ a և b գործակիցները բնական թվեր են: Այդպիսի հավասարումների համար գոյություն ունի լուծման հստ ակ ալգորիթմ: Ընդունվում է նաև, որ (1) հավասարման մեջ a և b գործակիցները փոխադարձաբար պարզ բնական թվեր են:Այն դեպքում, երբ a և b թվերը փոխադարձաբար պարզ չեն, կունենան 1-ից մեծ ընդհանուր բաժանարար, մասնավորաբար, ամենամեծ ընդհանուր d բաժանարար: Եթե $|c|$-ն չի բաժանվում d-ի, ապա ակնհայտ է, որ (1) հավասարումը լուծում չունի: Իսկ եթե $|c|$-ն բաժանվում է d-ի, ապա այդ հավասարման երկու մասերը կարելի է բաժանել d-ի, որից հետո կստացվի հավասարում, որում x և y փոփոխականների գործակիցներն արդեն փոխադարձաբար պարզ են:Այդ նկատառումով էլ բավական է (1) տեսքի հավասարումները դիտարկել փոխադարձաբար պարզ գործակիցներով: Ապացուցվում է, որ այդպիսի յուրաքանչյուր հավասարումն ունի անվերջ շատ ամբողջաթիվ լուծումներ: Լուծումների բազմությունը գտնելու համար կարելի է առաջնորդվել հետևյալ կանոնով. սկզբում, փորձարկելով, ընտրվում է որևէ $(x_0; y_0)$ լուծում, որն ընդունված է անվանել **մասնակի լուծում**: Ելնելով դրանից՝ գտնենք (1) հավասարման բոլոր լուծումները: Դիցուք, $(x; y)$-ը այդ հավասարման կամայական (ընթացիկ) լուծում է, այսինքն՝ ճիշտ է

$$ax + by = c$$

հավասարությունը: Հաշվի առնելով $c = ax_0 + by_0$ թվային ճիշտ հավասարությունը, կունենանք՝

$$ax + by = ax_0 + by_0,$$

որը կներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$a(x - x_0) = b(y_0 - y):$$

Քանի որ a և b թվերը փոխադարձաբար պարզ են, ուստի $|x - x_0|$-ն բաժանվում է b-ի, իսկ $|y_0 - y|$-ն a-ի: Նշանակում է՝

$$x - x_0 = bk, \qquad y_0 - y = ak,$$

որտեղ k-ն կամայական ամբողջ թիվ է:

Այսպիսով (1) հավասարման բոլոր լուծումները կներկայացվեն՝

$$x = bk + x_0, \quad y = -ak + y_0 \quad (k \in Z)$$

թվազույգերով, որտեղ $(x_0; y_0)$-ն որևէ մասնակի լուծում է:

Օրինակ: Լուծենք $7x + 13y = 44$ հավասարումը ամբողջ թվերով:

Լուծում: Դժվար չէ ի հայտ բերել որևէ մասնակի լուծում. օրինակ, $x = 10, y = -2$: Հետևաբար, տրված հավասարման լուծումների բազմությունը կլինի

$$x = 13k + 10, \quad y = -7k - 2$$

թվազույգերի բազմությունը, որտեղ k-ն ցանկացած ամբողջ թիվ է:

Դիոֆանտյան ոչ գծային հավասարումների մեջ առանձնահատուկ ուշադրության է արժանացել բնական x, y, z փոփոխականներով

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (2)$$

հավասարումը: Այն դիտարկվել է մոտ երկու հազար տարի առաջ մինչև Դիոֆանտը՝ Հին Եգիպտոսում: Միայն հայտնի է, որ Դիոֆանտը քաջատեղյակ է եղել այդ տիպի հավասարումներին և դրանք հաջողությամբ է կիրառել:

Եթե x-ը և y-ը ուղղանկյուն եռանկյան էջերի երկարություններն են, իսկ z-ը՝ ներքնաձիգի երկարությունը, ապա, ըստ Պյութագորասի հայտնի թեորեմի, x, y, z թվերի միջև տեղի ունի (2) առնչությունը: Այդ փաստը, ըստ էության, դեռևս Պյութագորասից մոտ հազար տարի առաջ հայտնի է եղել եգիպտացիներին և բաբելոնացիներին: Գործնական նպատակների համար նրանք օգտվել են հակադարձ պնդումից՝ եթե x, y և z թվերը կապված են (2) առնչությամբ, ապա այդպիսի կողմերով եռանկյունն ուղղանկյուն եռանկյուն է:

Թեորեմը կապված է Պյութագորասի անվան հետ հավանաբար այն պատճառով, որ այն առաջինը Պյութագորասն է ապացուցել: Պատահական չէ, որ երբեմն (2) հավասարումն անվանում են **«Պյութագորյան հավասարում»**, իսկ նրա ամեն մի $(x; y; z)$ լուծումը՝ **«Պյութագորյան եռյակ»**:

Ընդհանրապես ասած, դրական թվերի բազմությունում (2) հավասարումն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ: Սակայն այստեղ հարց է դրվում գտնել նրա բնական թվերով բոլոր լուծումները: Այդպիսի հարցադրման դեպքում է, որ (2) հավասարումը, մասնավորաբար, անվանվում է **երկրորդ աստիճանի դիոֆանտյան հավասարում:**

Դժվար չէ համոզվել, որ (2) հավասարությանը բավարարում են անվերջ բազմությամբ բնական թվերի $(x;y;z)$ եռյակներ (բավական է նկատել, որ ցանկացած k բնական թվի դեպքում $(3k;4k;5k)$ եռյակը լուծում է):

Բնական հարց է ծագում՝ գտնել բնական թվերի բոլոր այն $(x;y;z)$ եռյակները, որոնք բավարարում են (2) հավասարությանը, այլ կերպ՝ (2) հավասարումը **լուծել բնական թվերով**: Այդպիսի եռյակները ևս կոչվում են **պյութագորյան** (ինչպես որ համապատասխան եռանկյունները):

Նկատենք, որ եթե այդպիսի եռյակներից որևէ երկուսն ունեն ընդհանուր d բաժանարար, ապա d-ի վրա կբաժանվի նաև երրորդ թիվը: Նրանից յուրաքանչյուրը բաժանելով d-ի, նորից կստանանք պյութագորյան եռյակ: Նշանակում է՝ պյութագորյան ցանկացած եռյակից հեշտությամբ կարելի է անցնել պյութագորյան նոր եռյակի, որում թվերն արդեն զույգ առ զույգ փոխադարձաբար պարզ են: Այդպիսի յուրաքանչյուր եռյակն անվանում են **պրիմիտիվ**:

Դժվար չէ հասկանալ, որ առաջադրված խնդիրը լուծելու համար բավական է գտնել պյութագորյան պրիմիտիվ եռյակների ընդհանուր տեսքը: Ապացուցենք, որ **պյութագորյան ցանկացած $(x;y;z)$ պրիմիտիվ եռյակի համար կգտնվեն տարբեր զույգություն ունեցող, փոխադարձաբար պարզ q և $p(p>q)$ բնական թվեր այնպես, որ**

$$x=2pq,\quad y=p^2-q^2,\quad z^2=p^2+q^2: \qquad (3)$$

Դժվար չէ համոզվել, որ պյութագորյան պրիմիտիվ եռյակում բոլոր երեք թվերը չեն կարող լինել կենտ, ինչպես նաև նրանցից երկուսը չեն կարող լինել զույգ: Մնում է մեկ տարբերակ՝ երկուսը կենտ են, իսկ մեկը՝ զույգ: Այնուհետև հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ z-ը չի կարող լինել զույգ թիվ (արված պնդումներն ապացուցենք ինքնուրույն):

Այսպիսով, x և y թվերից մեկը զույգ է, մյուսը՝ կենտ, իսկ z-ը կենտ թիվ է: Որոշակիության համար ընդունենք, որ x-ը զույգ թիվ է՝

$x = 2u \quad (u \in N)$: Քանի որ y-ը և z-ը կենտ թվեր են, ուստի կարող ենք նշանակել՝

$$z + y = 2v, \quad z - y = 2w,$$

որտեղ v-ն և w-ն փոխադարձաբար պարզ բնական թվեր են (հակառակ դեպքում z և y թվերը չէին լինի փոխադարձաբար պարզ և կստացվեր հակասություն): Բացի այդ, v և w թվերը տարբեր զույգությամբ են (հակառակ դեպքում y-ը և z-ը կլինեին զույգ):

(2) հավասարությունը ներկայացնենք այսպես՝

$$x^2 = (z + y)(z - y):$$

Այստեղից և վերն արված նշանակումներից հետևում է, որ

$$u^2 = v \cdot w:$$

Քանի որ v և w թվերը փոխադարձաբար պարզ են և նրանց արտադրյալը լրիվ քառակուսի է, ուստի նրանցից յուրաքանչյուրը լրիվ քառակուսի է.

$$v = p^2, \quad w = q^2 \quad (p > q):$$

Ակնհայտ է, որ p-ն և q-ն փոխադարձաբար պարզ են և ունեն տարբեր զույգություն: Այսպիսով ունենք՝

$$z = p^2 + q^2, \quad y = p^2 - q^2, \quad x^2 = 4p^2q^2,$$

Դրանով իսկ ապացուցվեց, որ պյութագորյան ցանկացած $(x; y; z)$ պրիմիտիվ եռյակի համար կգտնվեն տարբեր զույգությամբ և փոխադարձաբար պարզ p և q $(p > q)$ բնական թվեր այնպես, որ.

$$x = 2pq, \quad y = p^2 - q^2, \quad z = p^2 + q^2 \qquad (3)$$

Դժվար չէ նկատել, որ ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը. նշված պայմաններին բավարարող p և q թվերից (3) հավասարություններից ստացվող x, y, z թվերը կազմում են պյութագորյան պրիմիտիվ եռյակ: Ի վերջո, արդյունքում կունենանք (2) հավասարման բոլոր լուծումները՝

$$x - 2kpq, \quad y - k(p^2 - q^2), \quad z - k(p^2 + q^2),$$

որտեղ k-ն կամայական բնական թիվ է:

Հեշտ է նկատել, որ ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը. **եթե p-ն և q-ն փոխադարձաբար պարզ թվեր են $(p > q)$, ապա (3)**

հավասարություններով ստացված x, y, z թվերը կազմում են պյութագորյան պրիմիտիվ եռյակ:

Դրանով հանդերձ, (2) հավասարման լուծումների բազմությունը կներկայացվի հետևյալ բանաձևերով.

$$x = 2kpq, \quad y = k\left(p^2 - q^2\right), \quad z = k\left(p^2 + q^2\right),$$

որտեղ k -ն կամայական բնական թիվ է:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

Լուծել հավասարումը բնական թվերով (1-4).

1. $3x + 7y = 50$:

2. $11x + 15y = 118$:

3. $x^2 + 4y = 105$:

4. $x^2 + xy = 24$:

5. Խանութում վաճառվում են 3 և 5 լիտրանոց փակ տարաներով միաստեսակ ներկեր: Գնորդին անհրաժեշտ է գնել 44 կգ ներկ:Վաճառողը կարո՞ղ է, արդյոք, բավարարել գնորդի պահանջը: Եթե այո, ապա քանի՞ ձևով և որքա՞ն յուրաքանչյուրից:

6. Արտադրամասում արտադրվող մեխերը դասավորվում են 16, 17 և 40 կգ տարողություններով արկղերում: Կարո՞ղ է, արդյոք, ապրանք բաց թողնողը հաճախորդին տալ 100 կգ մեխ՝ չբացելով արկղերը: Եթե այո, ապա ինչպե՞ս:

7. **(Հին չինական խնդիր).** Պահանջվում է 100 ստակով (դրամային միավոր) գնել 100 թռչուն՝ աքլորներ, հավեր, ճտեր: Հայտնի է, որ աքլորն արժե 5 ստակ, հավը՝ 4 ստակ, իսկ 4 ճուտը՝ մեկ ստակ: Յուրաքանչյուր թռչունից քանի՞ հատ կարելի է գնել, պայմանով, որ երեք տեսակից էլ պետք է լինեն:

8. Գտնել $117x - 79y = 17$ հավասարման բնական թվերով այն լուծումը, որի համար $x + y$ գումարն ամենափոքրն է:

9. Ապացուցել, որ $5x+7y=29$ հավասարումն ամբողջ թվերով ունի անվերջ շատ լուծումներ:

Գտնել բոլոր այն բնական $(x;y)$ թվազույգերը, որոնք բավարարում են տրված հավասարությանը (հավասարումը լուծել բնական թվերով) (10-18).

10. $(x-1)(y-5)=11$:

11. $(2y-5)(x-y)=13$:

12. $x^2-y^2=7$:

13. $xy+4x-7y=33$:

14. $x^2+3xy+2x-3y=26$:

15. $x^2-6xy+13y^2=100$:

16*. $1!+2!+3!+...+x!=y^2$:

17*. $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3$:

18*. $x^3-y^3=xy+61$:

Գտնել ամբողջ x և y թվերի բոլոր $(x;y)$ զույգերը, որոնք բավարարում են տրված հավասարությանը (հավասարումը լուծել ամբողջ թվերով)(19-36).

19. $14x-33y=32$:

20. $6x+11y=19$:

21. $17x+9y=1$:

22. $23x-37y=19$:

23. $x^2-y^2=19$:

24. $x+y=xy$:

25. $2x^2+y^2=267$:

26. $2xy+3y^2=17$:

27. $xy^2+x-3y^2=20$:

28. $2x^2+3xy-5y^2=-5$:

29. $3x^2-4xy+5y^2=97$:

30. $9x^2-6xy-8y^2=31$:

31. $x^2+y^2-2x+4y=95$:

32*. $x!+57=y^2$:

33. $x^2-7x+1=6^{y-5}$:

34*. $2^x-3^y=1$:

35*. $3^x-2^y=1$:

36*. $x^2+1=2^y$:

37. Ապացուցել, որ $x^2+y^2=z^2$ հավասարումը բնական թվերով ունի անվերջ շատ լուծումներ:

38. Ապացուցել, որ եթե x, y, z բնական թվերը բավարարում են $x^2+y^2=z^2$ առնչությանը, ապա.

ա) x և y թվերից գոնե մեկը զույգ է,

բ) x և y թվերից գոնե մեկը բաժանվում է 3-ի,

գ)* x և y թվերից գոնե մեկը բաժանվում է 4-ի,

դ)* x, y, z թվերից գոնե մեկը բաժանվում է 5-ի:

39*. Հնարավո՞ր է, որ ամբողջ գործակիցներով քառակուսային հավասարման տարբերիչը հավասար լինի 67 -ի:

40*. Ապացուցել, որ ոչ մի բնական n -ի դեպքում

$$n^4+2n^3+2n^2+1$$

արտահայտության արժեքը չի կարող լինել ամբողջ թվի քառակուսի:

Ապացուցել, որ հավասարումն ամբողջ թվերով ունի անվերջ շատ լուծումներ (41-51).

41. $4x^2+1=13y$:

42. $2^x-3=5y$:

43*. $x^2-2y^2=1$:

44*. $x^2-7y^2=1$:

45. $3x^2-10y=23$:

46*. $x^2+x=2y^2$:

47*. $x^2-3xy-10y^2=x+2y$:

48*. $17x^2-y^2=z^2$:

48*. $17x^2-y^2=z^2$:

49. $x^2+y^2=z^4$:

50*. $x+y=(x-y)^2$:

51*. $1+2+3+...+x=y^2$:

Ապացուցել, որ հավասարումն ամբողջ թվերով լուծում չունի (52-58).

52. $x^2-3y=11$:

53. $x^2-y^2=10^{2017}+2$:

54. $x!+13=y^2$:

55*. $x^3+5x=7^y+3$:

56*. $x^2+x-1=3^{2y+1}$:

57*. $x^2+4x+3=2^{y^2-y}$:

58*. $x^3+y^3=2016^z+2020$:

59. Գտնել բոլոր n բնական թվերը, որոնց դեպքում n^2-n+41 արտահայտության արժեքը լրիվ քառակուսի է:

60*. Գտնել բոլոր $\overline{xyz}$ եռանիշ թվերը, որոնք բավարարում են հետևյալ հավասարությանը՝

$$\overline{xyz}=x!+y!+z!:$$

Գտնել ամբողջ թվերի բոլոր (x,y,z) եռյակները, որոնք բավարարում են հավասարությանը (61-64).

61*. $3(x-3)^2+6y^2+2z^2+2y^2z^2=33$:

62*. $x+y+z=xyz \ \left(x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\right)$:

63*. $5x^2+y^2+3z^2-2yz=30$:

64*. $(x+y+z)(xy+yz+zx)=9xyz \ \left(x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\right)$:

65*. Գտնել բոլոր բնական x,y,z,t թվերը, որոնց դեպքում միաժամանակ ճիշտ են հետևյալ հավասարությունները՝

$$xy+zt=34,\quad xz-yt=19:$$

66*. Գոյություն ունե՞ն այնպիսի x և y բնական թվեր, որոնք բավարարեն

$$x^3+3=4y(y+1)$$

հավասարությանը:

67*. Շախմատային մրցությանը մասնակցեցին 8-րդ դասարանի երկու աշակերտ և 9-րդ դասարանի 4-ից ավելի աշակերտ: Յուրաքանչյուր մասնակից մյուսներից յուրաքանչյուրի հետ խաղաց մեկ անգամ: Երկու ութերորդցիները միասին հավաքեցին 8 միավոր, իսկ բոլոր իններորդցիները հավաքեցին հավասար քանակով միավորներ (յուրաքանչյուր հանդիպումից հետո հաղթողին տրվում է 1 միավոր, իսկ ոչ-ոքիի դեպքում խաղացողները ստանում են $\frac{1}{2}$ -ական միավոր): Քանի՞ իններորդցիներ էին մասնակցում մրցույթին:

68*. Շախմատային մրցությանը մասնակցեցին 9-րդ և 10-րդ դասարանցիները: Յուրաքանչյուր մասնակից մյուսներից յուրաքանչյուրի հետ հանդիպեց մեկ անգամ: Թեև տասներորդցիները 10 անգամ շատ էին իններորդցիներից, սակայն նրանք միասին հավաքեցին ընդամենը 4,5 անգամ շատ միավորներ, քան իններորդցիները միասին: Իններորդցի քանի՞ աշակերտ էր մասնակցում մրցույթին և նրանք միասին քանի՞ միավոր հավաքեցին:

§ 4. ԴԻՐԻԽԼԵԻ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ ԵՎ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԼՈՒԾԵԼԻՍ

Մտավոր զարգացման և մաթեմատիկական գիտելիքների ձևավորման գործում մեծ դեր ունեն մաթեմատիկական տրամաբանական «ապացուցման» խնդիրները: Հաճախ այդպիսի շատ խնդիրների լուծմանն օգնության է գալիս, այսպես կոչված, Դիրիխլեի[1] սկզբունքը: Այն կարելի է ձևակերպել պարզ, մատչելի լեզվով.

«Եթե n խցիկներում տեղավորված են n-ից ավելի առարկաներ, ապա ինչ-որ խցիկում կգտնվեն այդ առարկաներից առնվազն երկուսը:

Այն հաճախ ձևակերպվում է նաև կատակային տեսքով.

«Եթե n վանդակներում տեղավորված են m ճագարներ, ընդ որում $m>n$, ապա վանդակներից մեկում կգտնվեն առնվազն երկու ճագար»:

Այդ պնդումն այնքան հասկանալի է և ակնհայտ, որ թվում է, թե հաստատելու կարիք չունի: Այնուամենայնիվ, մենք կապացուցենք այն՝ հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք՝ ոչ մի վանդակում չկա մեկից ավելի ճագար: Այդ դեպքում պարզ է, որ ճագարների ընդհանուր թիվը չի գերազանցի n-ը: Բայց մենք ունենինք n-ից ավելի ճագարներ: Ստացված հակասությունն էլ հաստատում է Դիրիխլեի սկզբունքի ճշմարիտ լինելը:

Առաջին հայացքից զարմանալի է, թե ինչպես կարող է այդ ակնհայտ և պարզ պնդումը դառնալ արդյունավետ և հուսալի մեթոդ՝ բարդ խնդիրների լուծման համար: Բանն այն է, որ յուրաքանչյուր կոնկրետ խնդրում այնքան էլ հեշտ չէ կռահել, թե այնտեղ ինչն է «ճագարը», և ինչը՝ «վանդակը», և թե ինչո՞ւ «ճագարները» քանակով շատ են «վանդակներից»: «Ճագարների» և «վանդակների» ընտրությունը միշտ չէ, որ ակնհայտ է: Ավելին, նույնիսկ խնդրի տեքստից պարզ չի երևում՝ կիրառելի՞ է արդյոք Դիրիխլեի սկզբունքը: Դրա համար անհ-

[1] *Պետեր Գուստավ Լեժեն Դիրիխլե (1805-1859) – գերմանացի նշանավոր մաթեմատիկոս:*

բաժեշտ է տրամաբանական խնդիրների լուծման որոշակի կարողություն և հմտություն: Դիրիխլեի սկզբունքի կիրառմամբ խնդիրների լուծումը հատուկ գիտելիքներ չի պահանջում: Այդպիսի տրամաբանական խնդիրները լուծելու համար նույնիսկ պարտադիր չէ մաթեմատիկական պատրաստվածություն. պարզապես հարկավոր է ունենալ առողջ տրամաբանություն և սթափ մտածողություն: Պատահական չէ, որ մաթեմատիկական մրցույթներին հաճախ են առաջադրվում այնպիսի խնդիրներ, որոնք լուծվում են Դիրիխլեի սկզբունքի կիրառմամբ:

* * *

Անցնենք խնդիրների լուծմանը: Տեսնենք, թե ինչպես է գործում «Դիրիխլեի սկզբունքը»:

Օրինակ 1: ***Շենքի բնակիչներից 34-ը սովորում են միևնույն դպրոցում: Ապացուցել, որ նրանցից գոնե երկուսը միևնույն դասարանից են, եթե հայտնի է, որ այդ դպրոցում կա ընդամենը 30 դասարան:***

Լուծում: Այստեղ «ճագարները» աշակերտներն են, իսկ «վանդակները»՝ դասարանները: Քանի որ այդ շենքում ապրող աշակերտների քանակը մեծ է դասարանների քանակից, ուստի, համաձայն Դիրիխլեի սկզբունքի, կգտնվի դասարան, որում տվյալ շենքից կլինի առնվազն երկու աշակերտ:

Օրինակ 2: ***Յանկացած ձևով ընտրված է 7 մարդ: Ապացուցել, որ նրանցից գոնե երկուսն այդ խմբի մեջ կունենան հավասար թվով ծանոթներ:***

Լուծում: Պատկերացնենք 0, 1. 2, ... , 6 թվերով համարակալված յոթ խցիկ: Տվյալ համարով խցիկում այդ խմբից տեղավորենք նրան, ով ունի այդ համարի չափ ծանոթներ: Հնարավոր է երկու դեպք: Եթե այդ խմբից կա մարդ, որը մյուսներից ոչ մեկին ծանոթ չէ, ապա 6 համարով խցիկը դատարկ կմնա: Եթե այդպիսի մարդ չկա, ապա 0 համարով խցիկը կլինի դատարկ: Երկու դեպքում էլ գործ կունենանք վեց խցիկների հետ: Դիրիխլեի սկզբունքի պայմաններն առկա են: Հետևաբար խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Օրինակ 3: ***Ընտրված են կամայական 50 բնական թվեր: Ապացուցել, որ դրանցից կարելի է ընտրել մի քանիսը (կամ մեկը), որոնց գումարը բաժանվում է 50-ի:***

Լուծում: Դիցուք՝ ընտրված թվերն են՝ $a_1, a_2, ..., a_{50}$:

Դիտարկենք հետևյալ 50 բնական թվերը՝

$$b_1 = a_1,$$

$$b_2 = a_1 + a_2,$$

$$b_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$b_{50} = a_1 + a_2 + ... + a_{50} :$$

Եթե այդ գումարելիներից մեկը բաժանվի 50-ի, ապա խնդիրը լուծված է: Ենթադրենք, թե $b_1, b_2, ..., b_{50}$ թվերից և ոչ մեկը չի բաժանվում 50-ի: Այդ դեպքում նրանցից յուրաքանչյուրը 50-ի բաժանվելիս մնացորդում կտա 1, 2, ..., 49 թվերից մեկը, որոնց քանակը 49 է: Հետևաբար, համաձայն Դիրիխլեի սկզբունքի, կգտնվեն երկու թվեր, որոնք բաժանվելով 50-ի կտան միևնույն մնացորդը (այստեղ «ճագարները»՝ $b_1, b_2, ..., b_{50}$ թվերն են, իսկ «վանդակները»՝ 1, 2, ..., 49 մնացորդները): Դիցուք՝ այդ թվերն են b_k-ն և b_m-ը ($m > k$): Այդ դեպքում պարզ է, որ նրանց տարբերությունը բաժանվում է 50-ի՝

$$b_m - b_k = \left(a_1 + a_2 + ... + a_m\right) - \left(a_1 + a_2 + ... + a_k\right) = a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_m :$$

Վերջին արտահայտությունն էլ հենց ընտրված 50 թվերից մի քանիսի գումարն է: Դրանով էլ հաստատվում է խնդրի պնդումը:

Օրինակ 4: ***Ապացուցել, որ գոյություն ունի 7-ի աստիճան, որը վերջանում է 00001-ով:***

Լուծում: Դիտարկենք

$$7,\ 7^2,\ 7^3,\ ...,7^{10^5},\ 7^{10^5+1}$$

թվերը: Ակնհայտ է, որ այդ թվերը 10^5-ի բաժանելիս ստացվող հնարավոր մնացորդները պետք է փնտրել $0,\ 1,\ 2,\ ...,\ 10^5 - 1$ թվերի մեջ, որոնց քանակը 10^5 է: Սակայն դիտարկվող թվերի քանակը $\left(10^5+1\right)$ է (այս օրինակում «ճագարները» դիտարկվող թվերն են, իսկ «վանդակները»՝ մնացորդները): Ըստ Դիրիխլեի սկզբունքի կգտնվեն նշված թվերից երկուսը, որոնք 10^5-ի վրա բաժանելիս տալիս են միևնույն մնացորդը: Դիցուք՝ այդ թվերն են՝ 7^m և 7^{m+k}: Այդ թվերի տարբերությունը կբաժանվի 10^5-ի, այսինքն՝

$$7^{m+k}-7^m=7^m\left(7^k-1\right)\vdots 10^5:$$

7^m և $10^5=2^5\cdot 5^5$ թվերի կանոնական տեսքերից երևում է, որ դրանք չունեն 1-ից տարբեր ընդհանուր բաժանարար, այսինքն՝ փոխադարձաբար պարզ են, հետևաբար $\left(7^k-1\right)\vdots 10^5$: Նշանակում է՝ գոյություն ունի այնպիսի բնական q թիվ, որ $7^k-1=10^5 q$, որտեղից էլ՝

$$7^k=10^5 q+1=\cdots 00001:$$

Ստացվեց այն, ինչ պետք էր ապացուցել:

Օրինակ 5: ***Միավոր կողմով քառակուսու ներսում գտնվում են 33 կետ: Ապացուցել, որ նրանցից երեքը կարելի է ծածկել 3/16 շառավիղ ունեցող շրջանով:***

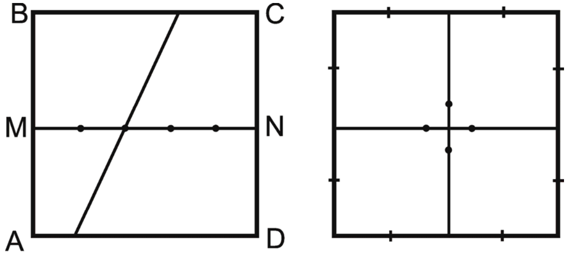
Լուծում: Տրված քառակուսին տրոհենք 1/4 կողմով 16 միատեսակ քառակուսիների: Դրանցից մեկում կգտնվեն նշված կետերից առնվազն երեքը (հակառակ դեպքում նրանց քանակը չի գերազանցի $2\cdot 16=32$-ը, որը հակասում է պայմանին): Քանի որ 1/4 կողմով քառակուսուն արտագծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է $\frac{\sqrt{2}}{8}$-ի, իսկ $\frac{\sqrt{2}}{8}<\frac{3}{16}$, ուստի այդ քառակուսին կարելի է ծածկել 3/16 շառավիղ ունեցող շրջանով:

Այս խնդիրը լուծելիս մենք օգտվեցինք Դիրիխլեի սկզբունքի հետևյալ տարբերակից. **«Եթե n վանդակներում տեղավորված են**

$kn+1$ ճագար, ապա վանդակներից մեկում նստած կլինեն առնվազն $k+1$ ճագար»:

Օ ր ի ն ա կ 6: ***9 ուղիղներից յուրաքանչյուրը տրված քառակուսին տրոհում է այնպիսի քառանկյունների, որոնց մակերեսները հարաբերում են այնպես, ինչպես 2:3: Ապացուցել, որ այդ ուղիղներից առնվազն երեքը կանցնեն միևնույն կետով:***

Լ ու ծ ու մ: Նախ նկատենք, որ յուրաքանչյուր այդպիսի ուղիղ քառակուսու միջին գիծը ևս տրոհում է 2:3 հարաբերությամբ: Իրոք, այդպիսի տրոհումից ստացվում է հավասար բարձրություններով երկու սեղան (նկ. 1 ա), որոնց մակերեսների հարաբերությունը հավասար է նրանց միջին գծերի հարաբերությանը՝ ME : EN=2:3 :



ա)

բ)

Նկ. 1

Այստեղից կռահում ենք, որ նշված 9 ուղիղներն անցնում են քառակուսու միջին գծերին պատկանող որոշակի չորս կետերով (նկ. 1 բ): Հետևապես, համաձայն Դիրիխլեի սկզբունքի, նշված 9 ուղիղներից գոնե երեքը կանցնեն միևնույն կետով: Այստեղ «վանդակները» այդ չորս կետերն են, իսկ «ճագարները»՝ խնդրում նշված 9 ուղիղները:

* * *

Ձևակերպենք օգտակար պնդումներ, որոնք ինչ-որ չափով նման են Դիրիխլեի սկզբունքին:

1) Եթե 1 երկարությամբ հատվածի վրա դասարվորված են մի քանի հատվածներ, որոնց երկարությունների գումարը մեծ է 1-ից, ապա նրանցից գոնե երկուսն ունեն ընդհանուր կետ:

2) Եթե 1 շառավղով շրջանագծի վրա դասավորված են մի քանի աղեղներ, որոնց երկարությունների գումարը մեծ է 2π-ից, ապա նրանցից գոնե երկուսն ունեն ընդհանուր կետ:

3) Եթե 1 մակերեսով պատկերի ներսում դասավորված են մի քանի պատկերներ, որոնց մակերեսների գումարը մեծ է 1-ից, ապա նրանցից գոնե երկուսն ունեն ընդհանուր կետ:

Վերոհիշյալ պնդումներից յուրաքանչյուրը կարելի է հեշտությամբ ապացուցել հակասող ենթադրության մեթոդով: Դրանք կիրառվում են հատկապես երկրաչափական բնույթի խնդիրներ լուծելիս:

Օրինակ 7: ***1 կողմով քառակուսու ներսում դասավորված են մի քանի շրջանագծեր, որոնց երկարությունների գումարը հավասար է 10-ի: Ապացուցել, որ գոյություն ունի այդ շրջանագծերից առնվազն չորսը հատող և քառակուսու կողմին զուգահեռ ուղիղ:***

Լուծում: Նկատենք, որ խնդրի պայմանում նշված բոլոր շրջանագծերի տրամագծերի երկարությունների գումարը հավասար է $10/\pi$-ի: Բոլոր շրջանագծերը պրոյեկտենք տրված $ABCD$ քառակուսու AD կողմի վրա (AB-ին զուգահեռ ուղղությամբ): Քանի որ յուրաքանչյուր շրջանագծի օրթոգոնալ պրոյեկցիան ուղղի վրա իր տրամագծին հավասար հատված է, ուստի նշված ձևով պրոյեկտումից ստացված բոլոր հատվածների գումարը հավասար է $10/\pi$-ի: Վերը ձևակերպված առաջին պնդումից և $\frac{10}{\pi} > 3 = 3\text{AD}$ ակնհայտ առնչությունից կռահում ենք, որ AD հատվածի վրա կա կետ, որը պրոյեկցիան է առնվազն չորս շրջանագծերին պատկանող կետերի:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. Տասներկու բնական թվերի գումարը 365 է: Ապացուցել, որ այդ թվերից գոնե մեկը փոքր չէ 30-ից:

2. Քսանմեկ աշակերտների բաժանեցին 200 տետր: Ապացուցել, որ նրանցից առնվազն երկուսը ստացել են հավասար քանակով (հնարավոր է՝ 0-ական) տետրեր:

3. Քաղաքն ունի առնվազն 200 000 բնակիչ, որոնք պատկանում են 33 ազգության: Ապացուցել, որ այդ քաղաքում կգտնվեն միևնույն ազգությանը պատկանող առնվազն 6 000 մարդ:

4. Դասարանն ունի 24 աշակերտ: Թելադրության գրավոր աշխատանքի մեջ Գեղամն արել էր 11 սխալ, իսկ մնացած աշակերտները՝ ավելի քիչ սխալներ: Ապացուցել, որ առնվազն երեք աշակերտ արել են նույն քանակով սխալներ (հնարավոր է՝ 0-ական):

5. Եղնիների անտառում կա 800 000 եղնի, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է ոչ ավելի, քան 500 000 ասեղ: Ապացուցել, որ կգտնվեն գոնե երկու եղնի, որոնց ասեղների քանակը կլինի նույնը:

6. Ապացուցել, որ ցանկացած յոթ բնական թվերից կարելի է ընտրել երկուսը, որոնց տարբերությունը բաժանվում է 6-ի:

7. Ձևակերպել և ապացուցել ընդհանուր պնդում, որի մասնավոր դեպքը նախորդ խնդրի լուծումն է:

8. Ապացուցել, որ ցանկացած ձևով ընտրված 10 մարդկանցից գոնե երկուսն ունեն միևնույն քանակով ծանոթներ այդ խմբից (հնարավոր է՝ 0-ական ծանոթներ): Համարվում է, որ որ A և B մարդկանց ծանոթությունը փոխադարձ է. եթե A-ն ծանոթ է B-ին, ապա B-ն ծանոթ է A-ին:

9. Ապացուցել նախորդ խնդրի ընդհանուր պնդումը. ցանկացած ձևով ընտրված n մարդկանցից գոնե երկուսն ունեն միևնույն քանակով ծանոթներ այդ խմբից:

10. Մարդու գլխի մազերի թիվը չի գերազանցում 300 000-ը: Ապացուցել, որ կգտնվեն չորս երևանցիներ, որոնք ունեն միևնույն քանակով գլխի մազեր (Երևանի բնակչությունը գերազանցում է 1,3 մլն-ը):

11. Դիցուք՝ $\dfrac{p}{q}$ ռացիոնալ թիվը ($p, q \in N$) ներկայացվում է անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով: Ապացուցել, որ կա՛մ ստացվում է վերջավոր, կա՛մ անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակ:

12. 1-ից 10 բնական թվերը կամայական կարգով գրված են միևնույն տողում: Նրանցից յուրաքանչյուրը գումարեցին այդ տողում նրա զբաղեցրած տեղի համարը: Ապացուցել, որ ստացված տասը գումարներից գոնե երկուսը վերջանում են նույն թվանշանով:

13*. Միևնույն տողում գրված են ութ բնական թվեր: Ապացուցել, որ կարելի է ընտրել այդ թվերից մեկը կամ կողք-կողքի գրված մի քանիսը, որոնց գումարը բաժանվում է 8-ի:

14*. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվերից կարելի է ընտրել մեկը կամ մի քանիսը, որոնց գումարը բաժանվում է n-ի:

15*. Առաջին հարյուր բնական թվերից կամայական ձևով ընտրվել են 51 թիվ: Ապացուցել, որ ընտրված թվերից միշտ կգտնվեն երկուսը, որոնցից մեկը բաժանվում է մյուսին:

16*. Ապացուցել, որ գոյություն ունի 2017-ի բազմապատիկ թիվ, որի տասնորդական գրառման մեջ մասնակցում է միայն 7 թվանշանը:

17*. Ապացուցել, որ գոյություն ունի այնպիսի բնական k թիվ, որի դեպքում $3^k = \ldots 00001$:

18*. Դիցուք՝ բնական k թիվը և 10-ը փոխադարձաբար պարզ են՝ $(k,10)=1$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի այնպիսի բնական m թիվ, որ $k^m = \ldots\underbrace{000\ldots001}_{100}$:

19*. p և q թվերը փոխադարձաբար պարզ են: Ապացուցել, որ գոյություն ունի այնպիսի $k \in N$ թիվ, որ pk -ն բաժանվելով q-ի տալիս է 1 մնացորդ:

20*. Ապացուցել, որ 10-ի հետ փոխադարձաբար պարզ ցանկացած բնական n թվի համար գոյություն ունի միայն մեկերով գրված թիվ, որը բաժանվում է n -ի:

21*.Ապացուցել, որ ցանկացած տասնյոթ բնական թվերից կարելի է ընտրել երկուսը, որոնց գումարը կամ տարբերությունը բաժանվում է 30-ի:

22*. Հարթության վրա տրված են 15 ուղիղ, որոնցից յուրաքանչյուրը հատում է մյուսները: Ապացուցել, որ նրանցից որևէ երկուսով կազմված անկյունը մեծ չէ 12^0-ից:

23. 2 կողմով հավասարակողմ եռանկյան ներսում կամայական ձևով նշված են 5 կետ: Ապացուցել, որ նրանցից կարելի է ընտրել երկուսը, որոնց հեռավորությունը փոքր է 1-ից:

24. Միավոր կողմով քառակուսու ներսում կամայական ձևով նշված են 201 կետ: Ապացուցել, որ նրանցից ինչ-որ երեքը կարելի է ծածկել 0,1 կողմով քառակուսիով:

25. 6×8 չափսերով ուղղանկյան ներսում պատահականորեն ընտրված են 5 կետ: Ապացուցել, որ նրանցից գոնե երկուսի հեռավորությունը չի գերազանցում 5-ը:

26*. Տրված են 7 հատվածներ, որոնցից յուրաքանչյուրի երկարությունը մեծ է 10 սմ-ից և փոքր է 1 մ-ից: Ապացուցել, որ նրանցից որևէ երեքով կարելի կառուցել եռանկյուն:

27*. Շրջանագծի մի քանի աղեղներ ներկված են կանաչ գույնով: Ներկված բոլոր աղեղների երկարությունների գումարը փոքր է շրջանագծի երկարության կեսից: Ապացուցել, որ գոյություն ունի տրամագիծ, որի երկու ծայրերն էլ ներկված չեն:

28*. 1 երկարությամբ հատվածի վրա մի քանի հատվածներ ներկված են այնպես, որ ցանկացած երկու ներկված կետերի հեռավորությունը հավասար չէ 0,1-ի: Ապացուցել, որ ներկված բոլոր հատվածների երկարությունների գումարը չի գերազանցում 0,5-ը:

29*. $n \times n$ չափսերով քառակուսու վանդակներում կամայական ձևով դասավորված են 1-ից մինչև n^2 բնական թվերը: Ապացուցել, որ միշտ կգտնվեն ընդհանուր կողմ ունեցող երկու վանդակներ, որոնցում գրված թվերի տարբերությունը մեծ է 5-ից, եթե.
ա) $n = 10$, բ) $n > 10$: Ճի՞շտ է, արդյոք, այդ պնդումը $n = 5$ դեպքում:

30. 10 կողմով քառակուսու ներսում գտնվում են միավոր կողմով երեսուն քառակուսի: Ապացուցել, որ այդ քառակուսիների ցանկացած դասավորության դեպքում միշտ կարելի է գտնել քառակուսու կողմին զուգահեռ ուղիղ, որը կհատի այդ քառակուսիներից առնվազն հինգը:

§ 5. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԻՆԴՈՒԿՑԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴԸ

1. Դեդուկցիա և ինդուկցիա

Մաթեմատիկայում բազմաթիվ հարցեր քննարկելիս մենք հաճախ ենք օգտվում ընդհանուր պնդումներից (թեորեմներից), որոնց ճշմարիտ լինելը մեզ արդեն հայտնի է: Լուծելով տվյալ խնդիրը՝ նրանում դիտարկվող կոնկրետ օբյեկտի վրա կիրառում ենք ընդհանուր պնդում:

Դատողությունների այնպիսի մեթոդը, որն ընդհանուր պնդումից անցնում է մասնակի պնդման, կոչվում է **դեդուկցիա:** Նման դատողության ելակետային պահն ընդհանուր պնդումն է, իսկ եզրափակիչ պահը՝ մասնավոր եզրահանգումը: Դեդուկտիվ դատողությունը, ըստ էության, տրամաբանական դատողությունն է:

Դեդուկցիա բառը թարգմանաբար նշանակում է՝ **հետևություն, եզրահանգում**:

Դեդուկցիան գիտական մտածողության միակ մեթոդը չէ: Ֆիզիկայում, քիմիայում, կենսաբանության մեջ գիտական արդյունքները հիմնականում ստացվում են դիտումների և փորձերի, այսինքն՝ **ինդուկտիվ** դատողությունների հիման վրա:

Ինդուկցիա[1] անվանում են դատողությունների այնպիսի մեթոդ, որը մասնակի դեպքերից հանգեցնում է մի որոշ ընդհանուր եզրակացության: Այդ մեթոդը ընդհանուր օրինաչափությունների ստացման հիմնական մեթոդն է՝ ինչպես բնական, այնպես էլ հումանիտար գիտությունների մեջ:

Ինդուկտիվ նշանակում է՝ արտածում դիտումների և փորձերի հիման վրա, այսինքն՝ մասնավոր դեպքերի դիտարկումների ճանապարհով ստացված օրինաչափության հետագա տարածում ընդհանուր դեպքի վրա:

Փորձարարական գիտությունների մեջ ինդուկտիվ եզրահանգումների դերը շատ մեծ է: Նրանցով բացահայտվում են այն դրույթները,

---

[1] inductio – լատիներեն բառ է, որը նշանակում է՝ *դրդում, հղացում, առաջբերում, կռահում, մակածում*:

որոնցից հետագայում դեդուկցիայի ճանապարհով արվում են հետագա մտահանգումները:

Մաթեմատիկայում ընտրված աքսիոմատիկայի հիմքում, ըստ էության, ընկած է ինդուկցիան: Յուրաքանչյուր ձևավորվող աքսիոմ, որպես ընդհանուր պնդում, ձևակերպվում է կենսափորձի, երկարատև մասնակի դիտարկումների, այսինքն՝ ինդուկտիվ եզրահանգումների հիման վրա:

Ինդուկցիան հաճախ հնարավորություն է տալիս գուշակել ձևավորվող թեորեմի ձևակերպումը, իսկ շատ դեպքերում՝ նաև նշագծել տվյալ թեորեմի ապացուցման ուղին: Ձևակերպված թեորեմի (ճշմարիտ պնդման) ապացուցման ընթացքն արդեն տարվում է դեդուկտիվ (տրամաբանական) հիմնավորումներով:

1. Լրիվ և թերի ինդուկցիաների հասկացությունները

Դիցուք, պահանջվում է ապացուցել, որ 2–ից մեծ և 30–ը չգերազանցող ցանկացած զույգ թիվ կարելի է ներկայացնել երկու պարզ թվերի գումարի տեսքով[1]:

Ապացուցման համար բավական է դիտարկել նշված միջակայքում եղած բոլոր զույգ թվերը և պնդումը հիմնավորել դրանցից յուրաքանչյուրի համար: Իրոք, քանի որ

$$4 = 2 + 2,\quad 6 = 3+3,\quad 8 = 3 + 5,\quad 10 = 3 + 7,\quad 12 = 5 + 7,\quad 14 = 3 + 11,$$
$$16 = 3 + 13,\quad 18 = 5 + 13,$$
$$20 = 7 + 13,\quad 22 = 3 + 19,\quad 24 = 5 + 19,\quad 26 = 7 + 19,\quad 28 = 5 + 23,$$
$$30 = 7 + 23,$$

հետևաբար խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Դիտարկենք մեկ օրինակ ևս: Հանրահաշվում հայտնի

$$|a+b| \le |a| + |b| \qquad (1)$$

անհավասարությունը, որտեղ a-ն և b-ն ցանկացած թվեր են, կարելի է ապացուցել երեք դեպքերի քննարկումով.

[1] Մաթեմատիկոսներին առ այսօր հայտնի չէ, թե այդ պնդումը ճիշտ կլինի՞ արդյոք 2–ից մեծ ցանկացած զույգ թվի համար:

ա) a և b թվերն ունեն միննույն նշանը (երկուսն էլ դրական են կամ երկուսն էլ՝ բացասական):

բ) a և b թվերն ունեն տարբեր նշաններ (մեկը դրական է, իսկ մյուսը՝ բացասական):

գ) a և b թվերից մեկը հավասար է զրոյի (մյուսը կարող է լինել ցանկացած թիվ):

Հեշտությամբ կարելի է հիմնավորել, որ յուրաքանչյուր դեպքում (1) անհավասարությունը ճիշտ է (կատարեք ինքնուրույն):

Դիտարկված խնդիրներում եզրակացությունն արվում է հնարավոր բոլոր դեպքերի քննարկման հիման վրա: Ընդունված է դատողությունների այդպիսի մեթոդն անվանել **լրիվ ինդուկցիա**: Հասկանալի է, որ այդպիսի մեթոդը կիրառելի է միայն այն դեպքում, երբ դեպքերի թիվը **վերջավոր** է: Այսպիսով, լրիվ ինդուկցիան կայանում է նրանում, որ ընդհանուր պնդումն ապացուցվում է նրանում առաջացող վերջավոր թվով հնարավոր դեպքերից յուրաքանչյուրի համար: Չնայած իր անվանմանը, լրիվ ինդուկցիայի մեթոդը, ըստ էության, ինդուկտիվ չէ, այլ՝ դեդուկտիվ է: Կիրառելով այն, մենք հենվում ենք տրամաբանության այնպիսի ընդհանուր դրույթի վրա, որը թույլ է տալիս ընդհանուրը մասնատել վերջավոր թվով մասնավոր դեպքերի և նրանցից յուրաքանչյուրը դիտարկել առանձին:

Երբեմն հաջողվում է ընդհանուր արդյունքը գուշակել ոչ թե բոլոր, այլ բավականաչափ մեծ թվով մասնավոր դեպքերի դիտարկման հիման վրա. այլ կերպ, եզրակացություն է արվում ոչ բոլոր դեպքերի քննարկումով (դրանք կարող են լինել անվերջ): Ընդունված է այդ մեթոդն անվանել **ոչ լրիվ** կամ **թերի ինդուկցիա**:

Բերենք օրինակներ:

Օրինակ 1: Արտածենք բանաձև n գումարելի պարունակող

$$\frac{1}{\cdot}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{+}$$

գումարը հաշվելու համար:

Այդ գումարը նշանակենք S_n–ով: Գտնենք S_n–ի արժեքները առաջին մի քանի բնական n-երի դեպքում.

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 4} = \frac{1}{4},$$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{2}{7},$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{7 \cdot 10} = \frac{2}{7} + \frac{1}{7 \cdot 10} = \frac{3}{10},$$

$$S_4 = S_3 + \frac{1}{10 \cdot 13} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10 \cdot 13} = \frac{4}{13},$$

$$S_5 = S_4 + \frac{1}{13 \cdot 16} = \frac{4}{13} + \frac{1}{13 \cdot 16} = \frac{5}{16}:$$

Ստացված արդյունքներից առաջացած օրինաչափությունը «հուշում» է, որ, հավանաբար, այդ նույն հատկությամբ օժտված կլինի ցանկացած թվով գումարելիների S_n գումարը: Այդ ենթադրությունը (վարկածը) կարելի է ձևակերպել այսպես.

«Ցանկացած բնական n–ի դեպքում ճիշտ է $S = \frac{}{+}$ *հավասարությունը»:*

Հաջորդ կետում դուք կծանոթանաք մի այնպիսի մեթոդի, որի օգնությամբ կարելի է ապացուցել, որ արված եզրահանգումը ճիշտ է:

Օրինակ 2: Դիտարկելով $A(n) = n^2 + n + 17$ արտահայտության արժեքը առաջին մի քանի բնական n–երի դեպքում, նկատում ենք, որ ստացված թվերը պարզ են.

$P(1) = 19$, $P(2) = 23$, $P(3) = 29$, $P(4) = 37$, $P(5) = 47$,

$P(6) = 59$, $P(7) = 73$, $P(8) = 89$, $P(9) = 107$, $P(10) = 127$:

Այստեղից եզրակացնել, որ «ցանկացած բնական n–ի դեպքում $P(n)$-ը պարզ թիվ է», ակնհայտորեն սխալ է: Օրինակ, $n = 17$ դեպքում ստանում ենք՝ $P(17) = 17^2 + 17 + 17 = 17 \cdot 19$, որը պարզ թիվ չէ:

Օրինակ 3: XVII դարի ֆրանսիացի մաթեմատիկոս **Ֆյեռ Ֆերման**՝ դիտարկելով $2^{2^n}+1$ տեսքի թվերը, նկատել է, որ $n=1, 2, 3, 4$ դեպքերում ստացվում են պարզ թվեր (համոզվեք ինքնուրույն): Այնուհետև նա ենթադրել է, որ այդ տեսքի բոլոր թվերը պարզ են: Սակայն, XVIII դարի խոշորագույն մաթեմատիկոս Լեոնարդ Էյլերը[1] հիմնավորեց, որ այդ ենթադրությունը սխալ է: Նա ցույց տվեց, որ հենց $n=5$ դեպքում ստացվող $2^{32}+1$ թիվը պարզ չէ. այն բաժանվում է 641–ի վրա:

Օրինակ 4: Գերմանացի մաթեմատիկոս **Գոտֆրիդ Լեյբնիցը** (1646–1716), դիտարկելով n^k-n տեսքի արտահայտությունը, ապացուցել է, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում n^3-n-ը բաժանվում է 3-ի, n^5-n-ը՝ 5-ի, n^7-n-ը՝ 7-ի: Ելնելով դրանից, նա ենթադրել է, որ ցանկացած կենտ k թվի դեպքում n^k-n-ը բաժանվում է k-ի: Սակայն դժվար չէ համոզվել, որ $k=9$ դեպքում այդ պնդումը սխալ է: Իրոք, երբ $n=2$, ստանում ենք՝ $n^9-n=2^9-2=510$ որը չի բաժանվում 9-ի:

Նշենք, որ այդ վարկածի ոչ ճիշտ լինելու մեջ շուտով համոզվել է նաև ինքը՝ Լեյբնիցը: Միաժամանակ նշենք, որ ընդհանուր դեպքում ճիշտ է հետևյալ պնդումը.

Ցանկացած պարզ k թվի և n բնական թվի դեպքում n^k-n-ը բաժանվում է k-ի:

Այդ պնդման ապացուցումը կտրվի հետագայում:

Այսպիսով, դատողությունների միևնույն մեթոդը մի դեպքում կարող է հանգեցնել ճիշտ եզրակացության, մեկ այլ դեպքում՝ սխալ եզրակացության:

Թերի ինդուկցիայի մեթոդը, ինչպես արդեն համոզվեցինք, միշտ չէ, որ հանգեցնում է լիովին հուսալի եզրակացության: Այդ մեթոդով ստացված եզրահանգումը, այնուամենայնիվ, մնում է սոսկ վարկած,

[1] Ծագումով շվեյցարացի, ապրել և աշխատել է Ռուսաստանում (Պետերբուրգ քաղաքում):

քանի դեռ այն չի հաստատվել մաթեմատիկական ճշգրիտ դատողություններով:

Թերի ինդուկցիան մաթեմատիկայում չի համարվում խիստ ապացուցման մեթոդ, սակայն հանդիսանում է նոր ճշմարտությունների բացահայտման էվրիստիկական (որոնողական) հզոր մեթոդ: Այն հնարավորություն է տալիս ձևակերպելու վարկածներ, որոնք կարիք ունեն հետագայում խիստ ապացուցման կամ ենթակա են հերքման:

3. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը

Մաթեմատիկայում լրիվ ինդուկցիայի մեթոդն ունի սահմանափակ կիրառումներ: Մաթեմատիկական շատ առաջադրություններ պարունակում են անվերջ բազմությամբ մասնավոր դեպքեր: Հասկանալի է, որ նման իրավիճակում հնարավոր չէ ստուգումը կատարել բոլոր դեպքերի համար: Մյուս կողմից՝ մենք արդեն համոզվել ենք, որ թերի ինդուկցիան կարող է բերել սխալ արդյունքի:

Մաթեմատիկայի շատ բաժիններում հարկ է լինում ապացուցել բնական փոփոխականից կախված $A(n)$ պնդման (առաջադրության) ճշմարիտ լինելը այդ փոփոխականի բոլոր արժեքների համար: Նման խնդիրներ լուծելիս մենք հաճախ կարող ենք դիմել ապացուցման հատուկ մեթոդի, որը կոչվում է **մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդ**: Այդ մեթոդի հիմքում ընկած է հետևյալ սկզբունքը.

Փոփոխականի բոլոր բնական արժեքների համար $A(n)$ պնդումը համարվում է ճիշտ, եթե տեղի ունեն հետևյալ երկու պայմանները.

***ա)* $A(n)$ պնդումը ճիշտ է $n=1$-ի դեպքում:**

***բ)* Այն ենթադրությունից, թե $A(n)$ պնդումը ճիշտ է $n=k$ դեպքում, որտեղ k-ն կամայական բնական թիվ է, հետևում է, որ այն ճիշտ է նաև $n=k+1$ դեպքում:**

Այս պնդումը կոչվում է **մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունք:**

[*Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը բնական թվերի թվաբանության հիմնական աքսիոմներից մեկն է: Սակայն, հիմքում ունե-*

նալով բնական թվերին վերաբերող հետևյալ երկու հատկությունները (աքսիոմները), կարելի է մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքն ընդունել որպես թեորեմ: Այդ հատկություններն են՝

ա) բնական թվերի ցանկացած ենթաբազմություն ունի ամենափոքր տարր;

բ) 1-ից տարբեր ցանկացած բնական թիվ ունի իր նախորդ բնական թիվը:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքն ապացուցենք հակառող ենթադրությամբ. դիցուք գոյություն ունեն այնպիսի բնական թվեր, որոնց համար պնդումը ճիշտ չէ: Նշանակենք այդ թվերից ամենափոքրը n_1 *-ով: Քանի որ* $n_1 \neq 1$ *(*$n=1$ *-ի դեպքում պնդումը ճիշտ է՝ ըստ պայմանի), ուստի* n_1 *-ը կունենա իր նախորդ՝* n_0 *բնական թիվը, որի համար պնդումը ճիշտ է: Ինդուկցիայի սկզբունքի երկրորդ կետի համաձայն՝ պնդումը ճիշտ կլինի նաև* n_0 *-ի հաջորդի՝* n_1 *-ի համար: Ստացված հակասությունը հաստատում է, որ այդ պնդումը ճիշտ է ցանկացած* $n \in N$ *դեպքում:*]

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցումը բաղկացած է երկու մասից: Սկզբում ապացուցվելիք պնդումը ստուգվում է $n=1$ դեպքում: Ապացուցման այդ մասը կոչվում է ինդուկցիայի **բազիս**:

Ապացուցման հաջորդ մասն անվանում են **ինդուկտիվ քայլ**: Այդ մասում ապացուցվում է պնդման ճշմարիտ լինելը $n=k+1$ դեպքում՝ այն ենթադրությամբ, որ պնդումը ճիշտ է $n=k$ բնական թվի դեպքում (ինդուկցիայի **ենթադրությունը**):

Եթե ապացուցման երկու մասերն էլ կատարված են, ապա մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի հիման վրա տվյալ առաջադրությունը ճիշտ կլինի ցանկացած բնական n թվի դեպքում:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը լայն կիրառություններ ունի մաթեմատիկայի տարբեր բաժիններում (թվաբանության մեջ, հանրահաշվում, թվերի տեսությունում, մաթեմատիկական անալիզում, երկրաչափության մեջ և այլն): Դիտարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1: *Ապացուցենք, որ ցանկացած բնական n-ի համար ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝*

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}:$$

Լուծում: $n=1$ դեպքում այդ հավասարության ձախ մասն ընդունում է 1^2, այսինքն՝

1-ին հավասար արժեք, իսկ աջ մասը՝ $\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$, որը դարձյալ հավասար է 1-ի: Նշանակում է՝ $n=1$ դեպքում պնդումը ճիշտ է:

Ընդունենք, որ ապացուցվելիք հավասարությունը ճիշտ է $\mathrm{n=k}$ դեպքում, այսինքն՝

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}:$$

Ապացուցենք, որ այն ճիշտ է նաև $n=k+1$ դեպքում (ինչպիսին էլ լինի բնական k թիվը), այսինքն՝

$$1^2+2^2+3^2\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{\left(k+1\right)(k+2)(2k+3)}{6}:$$

Իրոք՝

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+3)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}:$$

Հետևաբար, համաձայն մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի, տրված հավասարությունը ճիշտ է ցանկացած բնական n-ի դեպքում:

Օրինակ 2: *Ապացուցենք, որ ցանկացած բնական n թվի դեպքում* $7^{n+1}+8^{2n-1}$ *թիվը բաժանվում է 19-ի:*

Լուծում: $n=1$ դեպքում կունենանք՝ $7^2+8^1=57$, որը բաժանվում է 19-ի:

Ենթադրենք, թե մի որոշ k բնական թվի համար $7^{k+1}+8^{2k-1}$ թիվը բաժանվում է 19-ի:

Ապացուցենք, որ այդ դեպքում $7^{k+2}+8^{2k+1}$ թիվը (երբ $n=k+1$) ևս բաժանվում է 19-ի: Իրոք.

$$7^{k+2}+8^{2k+1}=7\cdot 7^{k+1}+64\cdot 8^{2k-1}=7(7^{k+1}+8^{2k-1})+57\cdot 8^{2k-1}:$$

Քանի որ ստացված գումարի յուրաքանչյուր գումարելին բաժանվում է 19-ի, հետևաբար $7^{k+2}+8^{2k+1}$ գումարը նույնպես բաժանվում է 19-ի:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի պայմանները բավարարված են, ուստի խնդրի պնդումը հիմնավորված է:

Օրինակ 3: Ապացուցենք Բեռնուլլիի անհավասարությունը[1].

$$(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha, \quad \alpha>-1, \quad n\in N:$$

Լուծում: $n=1$ դեպքում ստանում ենք ճիշտ անհավասարություն՝

$$1+\alpha \geq 1+\alpha:$$

Ենթադրենք, թե անհավասարությունը ճիշտ է $\mathrm{n=k}$ դեպքում, այսինքն՝

$$(1+\alpha)^k \geq 1+k\alpha:$$

Այդ անհավասարության երկու մասերը բազմապատկելով $(1+\alpha)$-ով (հիշենք, որ $\alpha>-1$), կստանանք՝

$$(1+\alpha)^{k+1} \geq (1+k\alpha)(1+\alpha)=1+(k+1)\alpha+k\alpha^2:$$

Քանի որ $k\alpha^2 \geq 0$, ուստի, առավել ևս, տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$(1+\alpha)^k \geq 1+(k+1)\alpha:$$

Եվ այսպես, ենթադրելով, որ տրված անհավասարությունը ճիշտ է $n=k$ դեպքում, մենք ապացուցեցինք, որ այն ճիշտ է նաև $n=k+1$ դեպքում: Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի երկու կետերն էլ բավարարված են, որով և ապացուցվում է Բեռնուլլիի անհավասարությունը:

---

[1] Ի պատիվ XVII դարի շվեյցարացի հայտնի մաթեմատիկոս Յակոբ Բեռնուլլիի (1654–1705):

Օրինակ 4: *Դիցուք,* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *-ը դրական թվեր են, ընդ որում՝*

$$x_1 x_2 \ldots x_n = 1:$$

Ապացուցենք, որ

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n:$$

Լուծում: $n = 1$ դեպքում կունենանք մեկ դրական թիվ՝ x_1: Ըստ պայմանի $x_1 = 1$ և, հետևաբար, կարելի է գրել $x_1 \geq 1$, այսինքն՝ $n = 1$ դեպքում պնդումը ճիշտ է:

Ենթադրենք, թե պնդումը ճիշտ է $n = k$ -ի համար: Համոզվենք, որ այդ պայմանով պնդումը ճիշտ կլինի նաև $\mathrm{n} = \mathrm{k} + 1$ դեպքում:

Դիցուք, $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ -ը $x_1 x_2 \ldots x_k \, x_{k+1} = 1$ պայմանին բավարարող կամայական դրական թվեր են: Հնարավոր է երկու դեպք.

ա) այդ թվերից յուրաքանչյուրը հավասար է 1-ի: Այդ դեպքում դրանց գումարը հավասար է $(k+1)$ -ի, ուստի և անհավասարությունը ճիշտ է;

բ) այդ թվերի մեջ կա գոնե մեկը, որը 1-ից տարբեր է: Այդ դեպքում կգտնվի նրանցից ևս մեկը, որը հավասար չէ 1-ի. ընդ որում, եթե նրանցից մեկը փոքր է 1-ից, ապա մյուսը մեծ է 1-ից: Չսահմանափակելով ընդհանրությունը, կարելի է համարել, որ $x_k > 1$, իսկ $x_{k+1} < 1$: Այժմ դիտարկենք հետևյալ k թվերը՝

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, \quad (x_k x_{k+1}):$$

Դրանց արտադրյալը հավասար է 1-ի, հետևաբար, ինդուկտիվ եզրակացության համաձայն՝

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} \geq k:$$

Վերջին անհավասարության երկու մասերին ավելացնենք

$$x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1}$$

և կատարենք որոշ պարզ ձևափոխություններ.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} \geq k - x_k x_{k+1} + x_k + x_{k+1} = k + 1 + x_k(1 - x_{k+1}) + x_{k+1} - 1 =$$
$$= k + 1 + x_k(1 - x_{k+1}) - (1 - x_{k+1}) = k + 1 + (1 - x_{k+1})(x_k - 1) \geq k + 1,$$

քանի որ $(1-x_{k+1})(x_k-1)>0$:

Այսպիսով, $n=k$ դեպքում պնդման ճշմարիտ լինելուց հետևում է նրա ճշմարիտ լինելը $n=k+1$ դեպքում: Պնդումն ապացուցված է:

Ապացուցման ընթացքից պարզ երևում է, որ ապացուցվելիք առնչության մեջ հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$:

Օրինակ 5: *Հարթության մեջ տարված են n ուղիղներ, որոնցից ցանկացած երկուսը զուգահեռ չեն և ցանկացած երեքը չեն անցնում միևնույն կետով: Հարթությունը քանի՞ մասի կտրոհեն այդ n ուղիղները:*

Լուծում: Հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ մեկ ուղիղը հարթությունը տրոհում է 2 մասի, երկու ուղիղները՝ 4 մասի, երեք ուղիղները՝ 7 մասի, չորս ուղիղները՝ 11 մասի:

Որոնելի քանակը նշանակենք $F(n)$-ով: Կարելի է նկատել, որ՝

$$F(1)=2,$$
$$F(2)=F(1)+2=2+2=1+(1+2),$$
$$F(3)=F(2)+3=1+(1+2+3),$$
$$F(4)=F(3)+4=1+(1+2+3+4),$$
$$F(5)=F(4)+5=1+(1+2+3+4):$$

Ելնելով ստացված օրինաչափությունից՝ բնական է ենթադրել, որ

$$F(n)=F(n-1)+n=1+(1+2+\cdots+n),$$

այսինքն՝

$$F(n)=1+\frac{n(n+1)}{2}: \qquad (1)$$

Ապացուցենք (1) բանաձևի ճշմարիտ լինելը՝ ելնելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից:

$n=1$ դեպքում բանաձևն արդեն ստուգված է: Անելով ինդուկցիայի ենթադրությունը, այնուհետև դիտարկենք խնդրի պայմանին բավարարող ցանկացած $(k+1)$ ուղիղներ: Ընտրենք այդ ուղիղներից մեկը և այն անվանենք $(k+1)$-րդ ուղիղ: Ինդուկցիայի ենթադրության համաձայն, մյուս k ուղիղները հարթությունը տրոհում են

$$1+\frac{k(k+1)}{2}$$

մասերի: Հատվելով k ուղիղների հետ, $(k+1)$-րդ ուղիղը կտրոհվի $(k+1)$ մասերի (հիմնավորեք): Ստացված մասերից յուրաքանչյուրը հարթության՝ արդեն եղած $k+1$ մասերից որևէ մեկը կտրոհի երկու մասի, ուստի, հարթության

$$1+\frac{k(k+1)}{2}$$

մասերին կավելանա ևս $(k+1)$ մաս: Այսպիսով,

$$F(k+1)=F(k)+(k+1)=1+\frac{k(k+1)}{2}+k+1=1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}:$$

Հետևաբար, (1) բանաձևը ճիշտ է ցանկացած $n\in N$ դեպքում:

Կարող ենք գրել պատասխանը՝ $1+\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$:

* * *

Որոշ դեպքերում անհրաժեշտ է լինում տվյալ պնդման ճշմարիտ լինելն ապացուցել ոչ թե բոլոր բնական n-երի, այլ միայն $n\geq m$ դեպքում, որտեղ m-ը տրված բնական թիվ է: Այդ դեպքում մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը ձևակերպվում է այսպես.

Եթե n բնական թվից կախված առաջադրությունը՝

ա) **ճիշտ է մի որոշ $n=m$ սկզբնական արժեքի համար և**

բ) **այն ենթադրությունից, թե առաջադրությունը ճիշտ է $n=k$ դեպքում, որտեղ $k\geq m$ կամայական բնական թիվ է, հետևում է, որ այն ճիշտ է նաև $n=k+1$ դեպքում, ապա առաջադրությունը ճիշտ է ցանկացած բնական $n\geq m$ համար:**

Օ ր ի ն ա կ 6: *Ապացուցենք, որ ցանկացած $n\geq 2$ թվերի գումարի մոդուլը չի գերազանցում այդ թվերի մոդուլների գումարին՝*

$$|a_1+a_2+...+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+...+|a_n|: \qquad (2)$$

Լուծում: Ապացուցումը տանենք մաթեմատիկական ինդունցիայի մեթոդով:

ա) $n=2$ դեպքում ստանում ենք հայտնի անհավասարություն՝

$$|a_1+a_2|\le|a_1|+|a_2|,$$

որը ճշմարիտ է ցանկացած a_1 և a_2 թվերի համար (ապացուցեք):

բ) Դիցուք, k-ն ($k\ge 2$) որևէ բնական թիվ է: Ապացուցենք, որ եթե (2) անհավասարությունը ճիշտ է k գումարելիների համար, ապա այն ճիշտ կլինի նաև այն դեպքում, երբ գումարելինելի քանակը $(k+1)$ է: Իրոք.

$$|a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}|=|(a_1+a_2+\ldots+a_k)+a_{k+1}|\le$$

$$\le|a_1+a_2+\ldots+a_k|+|a_{k+1}|\le|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_k|+|a_{k+1}|:$$

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի՝ վերը ձևակերպված սկզբունքի համաձայն անհավասարությունն ապացուցված է:

Օ ր ի ն ա կ 7: *Գտնել բոլոր* $n\in N$ *թվերը, որոնց դեպքում ճիշտ է*

$$2^n>2n^2-3n+1$$

անհավասարությունը:

Լուծում: Ստուգելով առաջին մի քանի բնական թվերը, նկատում ենք, որ $n=1$ և $n=2$ դեպքերում անհավասարությունը ճիշտ է, իսկ $n=3$, 4 և 5 արժեքների դեպքում՝ ճիշտ չէ:

Ելնելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի՝ վերևում ձևակերպված սկզբունքից, ապացուցենք, որ $n\ge 6$ $(m=6)$ դեպքում տրված անհավասարությունը ճիշտ է:

$n=6$ դեպքում ունենք՝ $64>55$, որը ճիշտ է:

Ենթադրենք, թե մի որոշ բնական k $(k\ge 6)$ թվի դեպքում տեղի ունի

$$2^k>2k^2-3k+1$$

անհավասարությունը: Քանի որ

$$2^{k+1}>2(k+1)^2-3(k+1)+1$$

անհավասարությունը (երբ $n=k+1$) կարելի է գրել

$$2(2^k-2k^2+3k-1)+2k^2-7k+2>0$$

տեսքով, ուստի վերջին անհավասարությունն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ $k\geq 6$ դեպքում $2k^2-7k+2>0$, որը պարզ երևում է՝ այն $2k(k-3,5)+2>0$ տեսքով ներկայացնելիս:

Այսպիսով, տրված անհավասարությունը ճիշտ է $n=1$, $n=2$ և $n\geq 6$ $(n\in N)$ արժեքների դեպքում:

* * *

Որոշ խնդիրներում մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքն ընդունվում է հետևյալ ձևակերպմամբ.

$A(n)$ պնդումը, որտեղ n-ը բնական թիվ է, ճշմարիտ է բոլոր $n\geq m$ $(m\in N)$ բնական թվերի համար, եթե իրագործելի են հետևյալ երկու պայմանները.

1) $A(n)$-ը ճշմարիտ է $n=m$ և $n=m+1$ դեպքերում;

2) Յուրաքանչյուր k $(k\geq m)$ բնական թվի դեպքում $A(k)$-ի և $A(k+1)$-ի ճշմարիտ լինելուց հետևում է $A(k+2)$-ի ճշմարիտ լինելը:

Օրինակ 8 *Ապացուցենք, որ եթե* $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$*-ը ամբողջ թիվ է, ապա ցանկացած բնական* n *թվի դեպքում* $\left(x^n+\dfrac{1}{x^n}\right)$*-ը ևս ամբողջ թիվ է:*

Լուծում: Նշանակենք՝ $x^n+\dfrac{1}{x^n}=S_n$: $n=1$ դեպքում ունենք՝ $S_1=x+\dfrac{1}{x}$, որը, ըստ պայմանի, ամբողջ թիվ է:

Ենթադրենք, թե S_n-ը ամբողջ է $n=k$ և $n=k+1$ արժեքների դեպքում, այսինքն՝

$$S_k=x^k+\frac{1}{x^k} \quad \text{և} \quad S_{k+1}=x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$$

թվերն ամբողջ են: Դժվար չէ նկատել, որ

$$x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\right)-\left(x^{k}+\frac{1}{x^{k}}\right),$$

ուստի կարող ենք գրել՝

$$S_{k+2}=S_1\,S_{k+1}-S_k:$$

Վերջին հավասարությունից էլ հետևում է, որ S_{k+2}-ը ամբողջ թիվ է, քանի որ S_1-ն ամբողջ է (ըստ պայմանի), իսկ ինդուկտիվ ենթադրության համաձայն S_k և S_{k+1} թվերը ևս ամբողջ են: Դրանով էլ ավարտվում է խնդրի լուծումը:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. Ապացուցել, որ $x^2+y^2 (x\in N, y\in N)$ արտահայտության արժեքը չի կարող լինել այնպիսի թիվ, որը 4–ի բաժանելիս տա 3 մնացորդ: Բացատրե՛ք, թե ապացուցման ո՞ր մասում է կիրառվում լրիվ ինդուկցիա:

2.Ապացուցել, որ եթե a և b բնական թվերից ոչ մեկը 3–ի բազմապատիկ չէ, ապա նրանց քառակուսիների գումարը 3-ի բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 2:

3. Ճի՞շտ է, արդյոք, հետևյալ պնդումը. «Ցանկացած բնական n թվի դեպքում n^2-n+41 արտահայտության արժեքը պարզ թիվ է»: Ստուգե՛ք $n=1, 2, 3,..., 20$ արժեքների դեպքում:

4. Դիցուք՝ $\mathrm{S}_n = \quad + \quad + \quad + \cdots + \quad n(2n-1):$

Գտնելով S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 արժեքները, գուշակե՛ք, թե ինչի է հավասար՝

ա) S_{100}-ը, բ) S_{231}-ը, գ) S_{2000}-ը:

5. Ապացուցել, որ $n \ (n \geq 2)$ թվերի գումարի քառակուսին հավասար է այդ n թվերի քառակուսիների և նույն թվերի բոլոր հնարավոր զույգերի կրկնապատիկ արտադրյալների գումարին:

6. Օգտվելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից, ապացուցել՝

ա) թվաբանական պրոգրեսիայի ընդհանուր անդամի բանաձևը՝

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

բ) թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի բանաձևը՝

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n,$$

գ) երկրաչափական պրոգրեսիայի ընդհանուր անդամի բանաձևը՝

$$b_n = b_1 q^{n-1},$$

դ) երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի բանաձևը՝

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} \quad (q \neq 1):$$

Օգտվելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից, ապացուցել, որ ցանկացած բնական n թվի դեպքում հավասարությունը ճիշտ է (7-20).

7. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$:

8. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$:

9. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$:

10. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$:

11. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$:

12. $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$:

13. $5+45+325+\ldots+(4n+1)\cdot 5^{n-1}=n\cdot 5^n$:

14. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$, որտեղ $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ ($n!$ – էն ֆակտորիալ):

15. $\dfrac{0}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\ldots+\dfrac{n-1}{n!}=1-\dfrac{1}{n!}$:

16. $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$:

17. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$:

18. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$:

19. $7+77+777+\cdots+77$ [redacted] :

20. $(n+1)(n+2)\ldots(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)$:

Արտածել բանաձև գումարի համար (21-23).

21. $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$:

22. $S_n = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$:

23. $S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2$:

Օգտվելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից, ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի համար (24-30).

24. $n^3 + 11n$ թիվը 6-ի բազմապատիկ է:

25. $7^n + 3n - 1$ թիվը 9-ի բազմապատիկ է:

26. $3^{3n+2} + 2^{4n+1}$ թիվը 11-ի բազմապատիկ է:

27. $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ թիվը 17-ի բազմապատիկ է:

28. $2^{2n-1} - 9n^2 + 21n - 14$ թիվը 27-ի բազմապատիկ է:

29. Տրված է՝ $a_1 = 4, \ \ a_{n+1} = 3a_n - 2$: Ապացուցել, որ $a_n = 3^n + 1 \ \ (n \in N)$:

30. Տրված է՝ $a_1 = 3, \ \ a_2 = 15, \ \ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$: Ապացուցել, որ $a_n = 4^n - 1, \ \ n \in N$:

Ելնելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից, ապացուցել անհավասարությունը (31-41).

31. $5^n > 7n - 3$, որտեղ $n \in N$:

32. $4^n \geq 3^n + n^2$, որտեղ $n \in N$:

33. $2^{n-1} > n(n+1)$, որտեղ $n \in N, \ n \geq 7$:

34. $2^n > n^3$, որտեղ $n \in N, \ n \geq 10$:

35. --

36. $\underbrace{\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\cdots+\sqrt{12}}}}}_{n \text{ հատ } 12} < 4$:

37. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$:

38. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$:

39. $\frac{n}{2} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1} < n \quad (n\in N)$:

40. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1} > 1 \quad (n\in N)$:

41. $2^{n-1}(a^n+b^n) \ge (a+b)^n$, որտեղ a -ն և b -ն դրական թվեր են, $n\in N$:

Ինչպիսի՞ բնական n -երի համար է անհավասարությունը ճիշտ (42, 43).

42. $3^n > 2^n + 7n$: **43.** $2^n > n^2 + 4n + 5$:

§ 6. ՆՇԱՆԱՎՈՐ ԿԵՏԵՐ ԵՎ ԳԾԵՐ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԵՎ ՔԱՌԱՆԿՅԱՆ ՄԵՋ

Երկրաչափության դասընթացում դիտարկվել են հարթության երկրաչափական պատկերների կարևոր և հետաքրքիր հատկություններ: Սակայն հիմնական դասընթացից դուրս են մնացել զարմանալի և օգտակար շատ առնչություններ և երկրաչափական նուրբ փաստեր: Դրանցից մի քանիսն ընդգրկված են դժվարավուն խնդիրների ցանկում: Այստեղ դիտարկվելու են հարթաչափական ևս մի քանի նշանավոր թեորեմներ և այդ փաստերի կիրառմամբ լուծվող մի շարք խնդիրներ:

Հիմնական դասընթացում ուսուցանվող եռանկյան նշանավոր կետերին են վերաբերում.

ա) **անկյունների կիսորդների հատման կետը** (ներգծած շրջանագծի կենտրոնը),

բ) **կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետը** (արտագծած շրջանագծի կենտրոնը),

գ) **բարձրություններն ընդգրկող ուղիների հատման կետը** (օրթոկենտրոն),

դ) **միջնագծերի հատման կետը** (ցենտրոիդ):

Ստորև բերված թեորեմները ցույց են տալիս, որ եռանկյան մեջ գոյություն ունեն այլ նշանավոր կետեր և գծեր:

1^0. Չևիի թեորեմը: Դիցուք, ABC -ն կամայական եռանկյուն է: Նրա BC, CA և AB կողմերի (կամ նրանց շարունակությունների վրա) նշենք, համապատասխանաբար, A_1, B_1 և C_1 կետերը (գագաթներից տարբեր): Բնական հարց է առաջանում. բացի վերը նշված դեպքերից, այդ կետերի ինչպիսի՞ դասավորության դեպքում AA_1, BB_1 և CC_1 ուղիները կհատվեն մի կետում: Դրանով իսկ ավելի ընդհանուր խնդիր է դրվում: Այս հարցի պատասխանը դեռևս 1678 թվականին տրվել է իտալացի երկրաչափ և իժեներ **Ջովանի Չևիի** կողմից, ով ձևակերպել և ապացուցել է հետևյալ պնդումը.

Թեորեմ 1. **Եթե** ABC **եռանկյան** BC, CA **և** AB **կողմերի կամ նրանց շարունակությունների վրա վերցված** (գագաթներից տարբեր), **համապատասխանաբար** A_1, B_1 **և** C_1 **կետերն այպիսին են, որ** AA_1, BB_1 **և** CC_1 **ուղիները հատվում են կամ զույգ առ զույգ զուգահեռ են, ապա**

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1: \qquad (1)$$

Ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը. **եթե տեղի ունի (1) հավասարությունը, ապա** AA_1, BB_1 **և** CC_1 **ուղիները հատվում են մի կետում կամ զուգահեռ են:**

2⁰. Մինելաոսի թեորեմը: Դիտարկենք կամայական ABC եռանկյուն և նրա BC, CA **և** AB կողմերի կամ նրանց շարունակությունների վրա վերցնենք նրա գագաթներից տարբեր, համապատասխանաբար, A_1, B_1 և C_1 կետերը: Դնենք այսպիսի ընդհանուր հարց. Ի՞նչ պայմանների առկայության դեպքում այդ կետերը կգտնվեն մի ուղղի վրա: Այդ հարցի պատասխանը տրվել է Հին հունական մաթեմատիկոս **Ալեքսանդրիացի Մինելաոսի** կողմից (մ.թ.ա. 1-ին դար):

Թեորեմ 2. **Դիցուք,** ABC **եռանկյան** BC, CA **և** AB **կողմերը պարունակող ուղիների վրա վերցված են համապատասխանաբար** A_1, B_1, C_1 **կետերը** (գագաթներից տարբեր): **Այդ դեպքում, եթե այդ կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա, ապա**

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1\ : \qquad (2)$$

Ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը. **եթե տեղի ունի (2) հավասարությունը, ապա** A_1, B_1 **և** C_1 **կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:**

3⁰. Թեորեմ 3 **(Ժերգոնի թեորեմը). Եթե** A_1, B_1, C_1**-ը** ABC **եռանկյանը ներգծած շրջանակի կետերն են, համապատասխանաբար,** BC, CA **և** AB **կողմերի հետ, ապա** AA_1, BB_1 **և** CC_1

ուղիները (հատվածները) հատվում են մի կետում: Այդ կետն անվանում են **Ժերգոնի կետ:**

Ժերգոնի թեորեմը, ըստ էության, Չևիի թեորեմի հակադարձ թեորեմի մասնավոր դեպք է:

4⁰. Թեորեմ 4 **(Նագելի թեորեմը). Դիցուք,** K, M **և** N **կետերը** ABC **եռանկյանն առգծած շրջանագծերի շոշափման կետերն են, համապատասխանաբար,** BC, CA **և** AB **կողմերի հետ: Այդ դեպքում** AK, BM **և** CN **ուղիները հատվում են մի կետում:**

Ընդունված է այդ կետն անվանել **Նագելի կետ:**

Նագելի թեորեմը նույնպես Չևիի թեորեմի հակադարձ թեորեմի հետևանք է:

5⁰. Թեորեմ 5 **(Վան-Օբելի թեորեմը). Եթե** ABC **եռանկյան գագաթները հանդիպակաց կողմերի** A_1, B_1, C_1 **կետերը** (գագաթներից տարբեր) **միացնող** AA_1, BB_1 **և** CC_1 **հատվածներն ունեն ընդհանուր կետ, ապա**

$$\frac{AC_1}{C_1B}+\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AO}{OA_1}:$$

6⁰. Ֆրանսիացի երկրաչափ **Ժերգոնը** 1818 թվականին հիմնավորեց հետևյալ պնդումը.

Թեորեմ 6. **Դիցուք,** O**-ն** ABC **եռանկյան ներսում գտնվող կամայական կետ է և** AO, BO **և** CO **ուղիները համապատասխան կողմերի հետ հատվում են** A_1, B_1 **և** C_1 **կետերում: Այդ դեպքում տեղի ունեն հետյալ հավասարությունները.**

ա) $\frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}=1$, **բ)** $\frac{OA}{A_1A}+\frac{OB}{B_1B}+\frac{OC}{C_1C}=2$:

7⁰. Տորիչերլլիի կետ: ABC եռանկյան համար T կետը կոչվում է **Տորիչերլլիի կետ,** եթե այդ կետից եռանկյան կողմերից յուրաքանչյուրը երևում է 120° անկյունով:

Թեորեմ 7: **Եթե եռանկյան ամենամեծ անկյունը փոքր է 120°-ից, ապա նրա համար գոյություն ունի Տորիչերլլիի կետ:**

8⁰. Թեորեմ 8: **Ցանկացած եռանկյան միջնագծերի հատման կետը, օրթոկենտրոնը և արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնը գտնվում են մի ուղղի վրա:** Ընդունված է այդ ուղիղն անվանել **Էյլերի ուղիղ:**

9⁰. Թեորեմ 9: **Եռանկյանն արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնը և օրթոկենտրոնը միացնող հատվածի միջնակետից, որպես կենտրոնից, արտագծյալ շրջանագծի շառավիղի կեսին հավասար շառավղով գծված շրջանագիծն անցնում է բարձրությունների հիմքերով, կողմերի միջնակետերով և օրթոկենտրոնը գագաթների հետ միացնող հատվածների միջնակետերով (*ինը կետերի շրջանագիծ*):**

10⁰. Թեորեմ 10. **Եռանկյանն արտագծած շրջանագծի ցանկացած կետից այդ եռանկյան կողմերն ընդգրկվող ուղիղներին տարված ուղղահայացների հիմքերը գտնվում են մի ուղղի վրա:** Ընդունված է այն անվանել **Սիմպսոնի ուղիղ:**

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. Որտե՞ղ է գտնվում արտագծած շրջանագծի կենտրոնը.

ա) ուղղանկյուն եռանկյան համար,

բ) սուրանկյուն եռանկյան համար,

գ) բութանկյուն եռանկյան համար:

2. Կարո՞ղ է եռանկյան գագաթը լինել նրա բարձրությունների հատման կետը:

3. ABC եռանկյան CC_1 միջնագծի վրա վերցված է M կետը: AM և BM ուղիղները եռանկյան կողմերը հատում են համապատասխանաբար A_1 և B_1 կետերում: Ապացուցել, որ AB և A_1B_1 ուղիղները զուգահեռ են:

4. Դիցուք, H-ը ABC եռանկյան օրթոկենտրոնն է: Ապացուցել, որ ABC, AHB, BHC և CHA եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերի շառավիղները հավասար են:

5. Կառուցենք ինը կետերի շրջանագիծը տրված.

ա) սուրանկյուն եռանկյան համար,

բ) ուղղանկյուն եռանկյան համար,

գ) բութանկյուն եռանկյան համար:

6. Արդյո՞ք ամեն մի եռանկյան.

ա) միջնագծերով, բ) բարձրություններով կարելի է կազմել մի նոր եռանկյուն:

7. Ապացուցել, որ ցանկացած եռանկյան միջնագծերն այդ եռանկյունը բաժանում են վեց հավասարամեծ եռանկյունների:

8. Գտեք եռանկյան մակերեսը, որի երկու կողմերի երկարություններն են՝ 12 և 16, իսկ երրորդ կողմին տարված միջնագծի երկարությունը՝ 10:

9. Տրված է ABC եռանկյունը: M կետն այնպիսին է, որ ABM, BCM և CAM եռանկյունները հավասարամեծ են: Այդպիսի քանի՞ M կետ կա:

10. ABC եռանկյան մեջ տարված են BM միջնագիծը և AH բարձրությունը: Հայտնի է, որ $BM = AH$: Գտնել MBC անկյունը:

11. Եռանկյան բարձրությունների երկարություններն են՝ 6, 8, 10: Ինչպիսի՞ եռանկյուն է այն. սուրանկյու՞ն, ուղղանկյուն թե՞ բութանկյուն :

12. ABC եռանկյան BC կողմի վրա վերցված M կետն այնպիսին է, որ $3 \cdot BM = MC$: Ի՞նչ հարաբերությամբ է AM ուղիղը բաժանում B գագաթից ելնող միջնագիծը:

13. Դիցուք, AL-ը ABC եռանկյան կիսորդ է: Ապացուցել, որ $BL : CL = AB : AC$:
Նույնը տեղի ունի եռանկյան արտաքին անկյան կիսորդի համար. այդ դեպքում L կետը գտնվում է BC կողմի շարունակության վրա:

14. ABC եռանկյան մեջ $AB : BC : CA = 6 : 5 : 10$: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանվում B գագաթից ելնող կիսորդը եռանկյան կիսորդների հատման կետով:

15. Ինչպես հայտնի է, եռանկյան կողմերի միջնակետերում կառուցված ուղղահայացները հատվում են մեկ կետում, որը հավասարահեռ է գագաթներից և հանդիսանում է արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնը: Ո՞ր կողմին է ավելի մոտ այդ կետը:

16. Գտնել հարթության այն կետերը, որտեղ գտնվում են տրված հիմքի վրա հենվող սուրանկյուն և բութանկյուն եռանկյունների գագաթները:

17. Ապացուցել, որ ABC եռանկյան A գագաթից տարված բարձրությունը և արտագծած շրջանագծի այն շառավիղը, որն անցնում է A գագաթով, եռանկյան AB և AC կողմերի հետ կազմում են հավասար անկյուններ:

18. Եռանկյունը գագաթից տարված ուղիղով բաժանված է երկու եռանկյունների: Ապացուցեք, որ բոլոր երեք եռանկյուններին արտագծված շրջանագծերի կենտրոններն ընդհանուր գագաթի հետ գտնվում են մեկ շրջանագծի վրա:

19. Հայտնի է, եռանկյան ներքին անկյունների կիսորդները հատվում են մեկ կետում, որը հավասարապես է հեռացած եռանկյան կողմերից և հանդիսանում է ներգծյալ շրջանագծի կենտրոնը: Ո՞ր գագաթին է այդ կետն ավելի մոտ:

20. Ապացուցել, որ եռանկյան ցանկացած անկյան կիսորդը հատվում է մյուս երկու անկյուններին կից արտաքին անկյունների կիսորդների հետ մի կետում, որը հավասարապես է հեռացած եռանկյան կողմերը պարունակող ուղիղներից (առգծյալ շրջանի կենտրոն):

21. Ապացուցել, որ եռանկյան գագաթներով հանդիպակաց կողմերին տարված զուգահեռ ուղիղները կազմում են մի եռանկյուն, որի համար տրված եռանկյան բարձրությունները հանդիսանում են կողմերի միջնուղղահայացներ: Այստեղից արտածել, որ եռանկյան բարձրությունները հատվում են մեկ կետում (**օրթոկենտրոն**):

22. Եռանկյան ո՞ր գագաթին է ավելի մոտ օրթոկենտրոնը:

23. Եռանկյան ո՞ր կողմին է ավելի մոտ օրթոկենտրոնը:

24. Եռանկյան ո՞ր բարձրությունն է ամենափոքրը:

25. Եռանկյան ո՞ր գագաթին և ո՞ր կողմին է ավելի մոտ ծանրության կենտրոնը:

26. Եռանկյան ո՞ր միջնագիծն է ամենափոքրը:

27. Ապացուցել, որ եռանկյան բարձրությունների հիմքերը միացնող ուղիղները կազմում են մի եռանկյուն, որի համար տրված եռանկյան բարձրությունները կիսորդներ են: Այստեղից արտածել բարձրությունների վերաբերյալ թեորեմը:

28. Ապացուցել, որ եթե տրված են չորս կետեր, որոնցից մեկը մյուս երեք կետերով կազմված եռանկյան օրթոկենտրոնն է, ապա չորս կետերից յուրաքանչյուրը կարելի է դիտել որպես մյուս երեք կետերով կազմված եռանկյան օրթոկենտրոն:

29. Ապացուցել, որ եռանկյան վեց կիսորդներից յուրաքանչյուր երեքը, որոնք հատվում են մեկ կետում, մյուս երեք կիսորդներով սահմանափակված եռանկյան բարձրություններն են:

30. Ապացուցել, որ եռանկյան ցանկացած երկու միջնագծերը հատվում են և հատման կետով յուրաքանչյուրը բաժանվում է 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից: Այստեղից արտածել, որ եռանկյան միջնագծերը հատվում են մեկ կետում (**ծանրության կենտրոն**):

31. Ապացուցել, որ այն ուղիղները, որոնք զուգահեռագծի գագաթը միացնում են նրա հանդիպակաց գագաթում հատվող կողմերի միջնակետերին, զուգահեռագծի մյուս երկու գագաթները միացնող անկյունագիծը բաժանում են երեք հավասար մասերի:

32. Ապացուցել, որ արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը եռանկյան որևէ կողմից երկու անգամ փոքր է այն հեռավորությունից, որ օրթոկենտրոնն ունի հանդիպակաց գագաթից:

33. Հավասարասրուն ABC եռանկյան մեջ AC հիմքի վրա վերցված է M կետն այնպես, որ $AM - MC = 12$: ABM և CBM եռանկյուններում ներգծված են շրջանագծեր: Գտնել BM կողմի հետ այդ շրջանագծերի շոշափման կետերի հեռավորությունը:

34. ABC եռանկյանը ներգծած և արտագծած շրջանագծերի կենտրոնները գտնվում են AB ուղղի տարբեր կողմերում : AB կողմը հավասար է արտագծյալ շրջանագծի շառավղին: Գտնել AOB անկյունը, որտեղ O -ն ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է:

35. ABC եռանկյան մեջ տարված են AM և CN բարձրությունները: Ապացուցել, որ BMN և ABC եռանկյունիները նման են:

36. Հնարավո՞ր է, որ եռանկյան կիսորդներից մեկն անցնի մյուս կիսորդի միջնակետով:

37. Մինելաուսի թեորեմի օգնությամբ ապացուցել, որ եռանկյան միջնագծերը հատման կետով բաժանվում են 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:

38. Օգտվելով Չևիի թեորեմից, ապացուցել, որ.
ա) եռանկյան կիսորդները հատվում են մի կետում,
բ) եռանկյան բարձրությունները պարունակող ուղիղները հատվում են մի կետում,

39. C_1 կետը ABC եռանկյան AB կողմը բաժանում է 2:1 հարաբերությամբ մասերի: B_1 կետը գտնվում է AC կողմի շարունակության վրա և $AC = CB$: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում B_1C_1 ուղիղը BC կողմը:

40. ABC եռանկյան AB և BC կողմերը, համապատասխանաբար, C_1 և A_1 կետերով բաժանվում են 1:2 հարաբերությամբ մասերի: CC_1 և AA_1 ուղիները հատվում են O կետում: Գտնել այն հարաբերությունը, որով BO ուղիղը բաժանում է AC կողմը:

41. ABC եռանկյան BC կողմի վրա վերցված է M կետը, CA կողմի վրա՝ N կետը, իսկ AB կողմի վրա՝ K կետը: Հայտնի է, որ $AK : KB = 2:3$, $BM : MC = 3:5$, $AN : NC = 2:5$: Ապացուցել, որ AM, BN և CK ուղիղները հատվում են մի կետում:

42. Առաջին եռանկյան յուրաքանչյուր կողմը մեծ է երկրորդ եռանկյան յուրաքանչյուր կողմից: Ճի՞շտ է արդյոք, որ.
ա) $S_1 > S_2$, բ) $R_1 > R_2$, գ) $r_1 > r_2$ (S_1, S_2, R_1, R_2, r_1, r_2 այդ եռանկյունների, համապատասխանաբար, մակերեսներն են, արտագծյալ շրջանագծերի շառավիղները, ներգծյալ շրջանագծերի շառավիղները):

43. Ապացուցել, որ հավասարասրուն եռանկյան հիմքի ցանկացած կետից սրունքները եղած հեռավորությունների գումարը հաստատուն է և հավասար է սրունքին տարված բարձրությանը:

44. Ապացուցել, որ կանոնավոր եռանկյան ներսի ցանկացած կետի հեռավորությունների գումարը նրա երեք կողմերից հաստատուն է: Ինչի՞ է հավասար այդ հաստատունը:

45. H-ը ABC եռանկյան օրթոկենտրոնն է: Հայտնի է, որ $HC = AB$: Գտնել ACB անկյունը:

46. ABC եռանկյան A գագաթից տարված են AM և AK ուղղահայացներն այդ եռանկյան B և C գագաթներին առընթեր արտաքին անկյունների կիսորդներին: Ապացուցել, որ MK հատվածը հավասար է ABC եռանկյան պարագծի կեսին:

47. Դիցուք, H-ը ABC եռանկյան բարձրություններն ընդգրկող ուղիղների հատման կետն է, իսկ A'-ը, B'-ը, C'-ը կետեր են, որոնք համաչափ են H կետին՝ BC, CA, AB ուղիղների նկատմամբ: Ապացուցեք, որ A', B', C' կետերը գտնվում են ABC եռանկյանն արտագծված շրջանագծի վրա:

48. BD հատվածը ABC եռանկյան կիսորդն է: Ապացուցել, որ $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$:

49. ABC եռանկյան B գագաթից տարված են BH բարձրությունը և B անկյան կիսորդը, որը եռանկյանն արտագծված շրջանագծի O կենտրոնով այդ շրջանագիծը հատում է E կետում: Ապացուցել, որ BE ճառագայթը OBH անկյան կիսորդն է:

50. ABC հավասարակողմ եռանկյանն արտագծված շրջանագծի կամայական X կետը հատվածներով միացված է նրա գագաթներին: Ապացուցել որ AX, BX և CX հատվածներից մեկը հավասար է մյուս երկու հատվածների գումարին:

51. Ապացուցել, որ ցանկացած եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի R շառավիղը, ներգծյալ շրջանագծի r շառավիղը և այդ շրջանագծերի կենտրոնների d հեռավորությունը կապված են $d^2 = R^2 - 2Rr$ ***հավասարությամբ (էյլերի բանաձև)***:

52. Գտնել ABC եռանկյան C գագաթի անկյունը, եթե հայտնի է, որ այդ գագաթից մինչև օրթոկենտրոնը (բարձրություններն ընդգրկող ուղիղների հատման կետը) եղած հեռավորությունը հավասար է այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավղին:

53. ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունների հիմքերը գագաթներ են մեկ այլ եռանկյան համար, որի պարագիծը հավասար է $2p$-ի: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե նրան արտագծված շրջանագծի շառավիղը հավասար է R-ի:

54. Ապացուցել, որ սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունների հիմքերը միացնող հատվածները կազմում են եռանկյուն, որում այդ բարձրությունները կիսորդներ են:

55. ACB եռանկյան մեջ $AC = \sqrt{2}$, $\angle ABC = 90^0$: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որն անցնում է A, C կետերով և ACB եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնով:

56. Ապացուցել, որ եռանկյան կողմերի՝ $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ երկարությունների միջոցով A գագաթից տարված կիսորդի l_a երկարությունը կարելի է որոշել

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$$

բանաձևով:

57. ABC եռանկյան մեջ $\angle BAC = 120^o$: Տարված են AA_1, BB_1 և CC_1 անկյան կիսորդները: Գտնել $C_1A_1B_1$ անկյունը:

58. Եռանկյան կողմերի a, b, c երկարությունները բավարարում են $a^2+b^2=5c^2$ հավասարությանը: Ապացուցել, որ a և b երկարություններով կողմերին տարված միջնագծերը փոխուղղահայաց են:

59. D կետը գտնվում է ABC հավասարասրուն եռանկյան AC հիմքի վրա: Ապացուցել, որ ABD և CBD եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերի շառավիղները միմյանց հավասար են:

60. Դիցուք, H-ը տրված եռանկյան օրթոկենտրոնն է, M-ը՝ միջնագծերի հատման կետը, իսկ O-ն՝ արտագծած շրջանագծի կենտրոնը: Գտնել HM հատվածի երկարությունը, եթե հայտնի է, որ $MO=5$:

61. AM-ը և CN-ը ABC եռանկյան կիսորդներն են: Գտնել ABC անկյունը, եթե $AC=AN+CM$:

Դիցուք, a, b, c-ն, համապատասխանաբար, BC, CA, AB կողմերի երկարություններն են, h_a, h_b, h_c-ն՝ A, B, C գագաթներից տարված բարձրությունները, r-ը՝ ներգծած շրջանագծի շառավիղը, R-ը՝ արտագծած շրջանագծի շառավիղը, r_a, r_b, r_c համապատասխանաբար BC, CA, AB կողմերը և մյուս երկու կողմերի շարունակությունները շոշափող շրջանագծերի (առգծած շրջանագծերի) շառավիղները, p-ն՝ կիսապարագիծը:

Ապացուցել, որ ցանկացած եռանկյան մեջ ճիշտ է հավասարությունը (62-65).

62. $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}$:

63. $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}$:

64. $\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}+\dfrac{1}{(p-b)(p-c)}+\dfrac{1}{(p-a)(p-c)}=\dfrac{1}{r^2}$:

65. $r_a+r_b+r_c-r=4R$:

*   *   *

66. Ապացուցել, որ ցանկացած քառանկյան կողմերի միջնակետերը զուգահեռագծի գագաթներ են:

67. Անհավասար կից կողմերով ուղղանկյան բոլոր անկյունների կիսորդները հատվելիս առաջացնում են քառանկյուն: Ապացուցել, որ այդ քառանկյունը քառակուսի է:

68. Զուգահեռագծի կողմերի վրա, նրանից դուրս, կառուցված են քառակուսիներ: Ապացուցել, որ այդ քառակուսիների անկյունագծերի հատման կետերը քառակուսու գագաթներ են:

69*. P, Q, R և T կետերը $ABCD$ զուգահեռագծի, համապատասխանաբար, AB, BC, CD և DA կողմերի միջնակետերն են: Ապացուցել, որ AQ, BR, CT և DP ուղիղների հատման դեպքում առաջանում է զուգահեռագիծ: Գտնել նրա մակերեսի և $ABCD$ զուգահեռագծի մակերեսի հարաբերությունը:

70*. Ապացուցել, որ եթե ուռուցիկ քառանկյան հանդիպակաց կողմերը զուգահեռ չեն, ապա նրանց կիսագումարը մեծ է մյուս երկու հանդիպակաց կողմերի միջնակատերը միացնող հատվածից:

71*. Ապացուցել, որ եթե ուռուցիկ քառանկյան երկու հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածը հավասար է մյուս երկու կողմերի կիսագումարին, ապա այդ քառանկյունը սեղան է կամ զուգահեռագիծ:

72*. $ABCD$ սեղանի անկյունագծերը հատվում են O կետում: AB-ն սեղանի փոքր հիմքն է և ABO եռանկյունը հավասարակողմ է: Ապացուցել, որ այն եռանկյունը, որի գագաթներն են OA, OD և BC հատվածների միջնակետերը, հավասարակողմ է:

73. Ապացուցել, որ եթե ներգծյալ քառանկյան անկյունգծերը փոխուղղահայաց են, ապա նրա հանդիպակաց կողմերի քառակուսիների գումարը հավասար է արտագծյալ շրջանագծի տրամագծի քառակուսուն:

74. Շրջանագծին ներգծած $ABCD$ քառանկյան A և B անկյունների կիսորդները հատվում են CD կողմի վրա գտնվող կետում: Ապացուցել, որ $CD = BC + AD$:

75*. Ապացուցել, որ շրջանագծին ներգծված ցանկացած քառանկյան անկյունագծերի արտադրյալը հավասար է հանդիպակաց կողմերի արտադրյալների գումարին (**Պտղոմեոսի թեորեմ**):

76. Ապացուցել, որ շրջանագծին արտագծված ուղղանկյուն սեղանի մակերեսը հավասար է նրա հիմքերի արտադրյալին:

77*. $KLMN$ քառակուսին գտնվում է $ABCD$ քառակուսու ներսում: Ապացուցել, որ AK, BL, CM և DN հատվածների միջնակետերը քառակուսու գագաթներ են:

78. Ապացուցել, որ միևնույն շրջանագծին ներգծած բոլոր քառանկյուններից ամենամեծ մակերեսն ունի քառակուսին:

79*. Ապացուցել, որ շրջանագծին ներգծած քառանկյան մակերեսը կարելի է հաշվել $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ բանաձևով, որտեղ a, b, c, d -ն քառանկյան կողմերն են, իսկ p -ն՝ կիսապարագիծը:

80*. Ապացուցել, որ քառակուսու կենտրոնով անցնող ցանկացած ուղղից մինչև քառակուսու գագաթները եղած հեռավորությունների քառակուսիների գումարը կախված չէ այդ ուղղի դիրքից: Ինչի՞ է հավասար այն, եթե քառակուսու կողմը a է:

81*. Ապացուցել, որ միևնույն պարագիծն ունեցող ուռուցիկ քառանկյուններից ամենամեծ մակերեսն ունի քառակուսին:

82*. Եթե ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների համապատասխան գագաթները միացնող ուղիղներն անցնում են մի կետով, ապա համապատասխան կողմերի հատման կետերը դասավորված են մի ուղղի վրա (**Դեզարգի թեորեմը**):

§ 7. ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Երկրաչափության դասընթացում սովորողները հաճախ են գործ ունենում պարզագույն կառուցումների հետ: Այդ ընթացքում նրանք օգտվում են գծագրական գործիքներից՝ մասշտաբային քանոնից, կարկինից, անկյունաչափից, անկյունարդից: Պարզվում է, որ կառուցումներից շատերը կարելի է իրագործել միայն կարկինով և մասշտաբային բաժանումներ չունեցող քանոնով: Դեռևս Հին Հունաստանում երկրաչափական կառուցումները կատարելիս օգտվել են բազմաթիվ գործիքներից: Հետագայում մաթեմատիկոսները պարզաբանեցին, որ միայն քանոնի և կարկինի միջոցով կառուցումներն ավելի հստակ են ու գիտականորեն ճշգրիտ: Այդ ձևով կատարված կառուցումներն ավելի բարձր էր դասվում: Երկրաչափները հաճախ են փորձ արել կառուցումներն իրագործել գործիքների հնարավորինս սահմանափակումով: Այդպես ծնվեց ֆիքսված բացվածքով կարկինի միջոցով կառուցման տեսությունը: 19-րդ դարում ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Ժան Պոնսելենի, հետագայում նաև շվեցարական երկրաչափ Յակոբ Շտեյների կողմից ի հայտ բերվեցին և գիտականորեն հիմնավորվեցին կառուցումների տեսությանը վերաբերող հիմնական քաղափարները, որոնց հիմքում ընկած է հետևյալ սկզբունքը՝ **կարկինի և քանոնի միջոցով իրականացվող բոլոր կառուցումները իրագործելի են ֆիքսված բացվածքով կարկինի և քանոնի միջոցով**:

Նշենք, որ քանոնը թույլ է տալիս տանել կամայական ուղիղ, ինչպես նաև տանել (կառուցել) տրված երկու կետերով անցնող ուղիղը: Քանոնի միջոցով այլ գործողություն կատարել չի կարելի:

Կարկինը, որպես երկրաչափական կառուցման գործիք, թույլ է տանել կամայական շառավղով շրջանագիծ, ինչպես նաև պատկերել տրված կենտրոնով և տրված հատվածին հավասար շառավղով շրջանագիծը: Մասնավորաբար, կարկինով կարելի է տրված հատվածը տեղադրել տրված ուղղի վրա՝ նրա վրա տրված կետից:

Ենթադրվում է, որ սովորողներն արդեն քաջատեղյակ են վերոհիշյալ երկու գործիքների միջոցով կատարվող պարզագույն կառուցումներից շատերին, ինչպիսիք են.

– տրված կողմերով եռանկյան կառուցումը,
– տրված անկյանը հավասար անկյան կառուցումը,
– տրված անկյան կիսորդի կառուցումը,
– տրված հատվածի միջնակետի կառուցումը (հատվածը երկու հավասար մասերի բաժանումը),
– տրված կետով տրված ուղղին ուղղահայացի կառուցումը,
– տրված հատվածի բաժանումը n հավասար մասերի (n-ը 1-ից մեծ ցանկացած բնական թիվ է):

Կառուցման խնդիրներ լուծելիս, հիմնականում, կիրառվում են հետևյալ մեթոդները.

1) **Հանրահաշվական մեթոդ (հատվածի կառուցումը բանաձևով):**
2) **Երկրաչափական տեղերի մեթոդ:**
3) **Նմանության մեթոդ;**
4) **Համաչափության մեթոդ:**
5) **Զուգահեռ տեղափոխման մեթոդ:**
6) **Պտույտի մեթոդ:**

Այդպիսի խնդիրներ լուծելիս (որոնք իրագործվում են կարկինի և քանոնի միջոցով), ընդհանուր առմամբ, որպես կանոն, առաջնորդվում են չորս մասից բաղկացած հետևյալ պլանով:

1) Խնդրի լուծման եղանակի որոնումը՝ խնդրի տվյալների և որոնելի տարրերի միջև կապեր հաստատելու միջոցով: Այս մասը կոչվում է խնդրի **վերլուծություն**: Նշված կապերը ի հայտ բերելու համար ենթադրվում է, որ պատկերը կառուցված է՝ թղթի (գրատախտակի) վրա նշագծելով այն: Տեսադաշտում ունենալով ենթադրյալ պատկերը, օժանդակ կառուցումների և հայտնի փաստերի միջոցով փորձ է արվում կապեր ստեղծել հայտնի տվյալների և անհայտ տարրերի միջև: Այդպիսի վերլուծությունը հնարավորություն է տալիս գուշակել լուծման ընթացքը:

2) Որոնելի պատկերի **կառուցումը**՝ վերլուծության արդյունքի հիման վրա:

3) **Ապացուցում:** Այդ ընթացքում ապացուցվում է, որ կառուցված պատկերը բավարարում է խնդրի բոլոր պայմաններին:

4) Խնդրի **հետազոտում**: Այս մասում պարզաբանվում է, թե եղած տվյալների միջոցով ո՞ր դեպքում խնդիրը լուծում չի ունենա, ո՞ր դեպքում լուծումը կլինի միակը և ո՞ր դեպքում՝ մեկից ավելի լուծումներ:

Այն դեպքում, երբ խնդիրը բավականաչափ պարզ է, առանձին մասեր, օրինակ վերլուծությունը կամ հետազոտումը, բաց են թողնվում:

Հանրահաշվական կամ անալիտիկ մեթոդ

Կառուցման վերաբերյալ երկրաչափական խնդիրների լուծման մյուս մեթոդներներին համանման, հանրահաշվական մեթոդի դեպքում նույնպես, նախ ենթադրվում է, որ խնդիրը լուծված է և որոնելի պատկերը կառուցված է: Աշխատում են որոնելի մեծությունը (օրինակ՝ հատվածը) արտահայտել տված մեծությունների միջոցով, այնուհետև կառուցում են ստացված արտահայտությունը (որի համար օգտվում են $a \pm b$, $\dfrac{ab}{c}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ և այլն արտահայտությունների կառուցումից, որտեղ a, b, c-ն տված հատվածներ են): Շատ դեպքերում էլ օժանդակ կառուցումների միջոցով են աշխատում կապ ստեղծել խնդրի հայտնի և անհայտ տարրերի միջև՝ հավասարումների օգնությամբ, որից հետո, նախորդների հետ միասին օգտագործելով հայտնի դարձած տարրերը, քանոնի և կարկինի միջոցով կառուցում են որոնելի պատկերը: Վերջապես անհրաժեշտ է խնդիրը հետազոտել ամբողջությամբ, այսինքն՝ որոշել լուծումների թիվը, լուծումների թվի և տրված մեծությունների կապը, տրված մեծություններն ինչ պայմանի պիտի բավարարեն խնդիրը լուծելու համար և այլն:

Երկրաչափական տեղերի մեթոդ

Կառուցման խնդիրները լուծելիս ամենից հաճախ կիրառվում է **երկրաչափական տեղերի մեթոդը**։

Սահմանում։ Որոշակի հատկությամբ օժտված **կետերի երկրաչափական տեղ** ասելով հասկանում ենք պատկեր, որի բոլոր կետերն ունեն այդ հատկությունը, և որից դուրս չկան այդպիսի կետեր։ Կետերի երկրաչափական տեղի կիրառությունը կառուցման խնդիրների լուծման նկատառմամբ կոչվում է **երկրաչափական տեղերի մեթոդ**։ Այս մեթոդի էությունը կայանում է հետևյալում։

Աշխատում են ամբողջ խնդիրը հանգեցնել մի որոշակի կետի գտնելուն։ Այդ կետը որոշվում է խնդրի տվյալներից բխող երկու պայմաններից։ Եթե հաշվի չառնենք առաջին պայմանը, ապա գոյություն կունենա ոչ միայն մեկ կետ, այլ անթիվ բազմությամբ կետեր, որոնք օժտված լինելով միևնույն երկրաչափական հատկությամբ, կազմում են կետերի որևէ երկրաչափական տեղ։ Իսկ եթե հաշվի չառնենք երկրորդ պայմանը և սահմանափակվենք առաջինով, ապա կստացվի մի այլ երկրաչափական տեղ։ Այդ երկրաչափական տեղերի հատման յուրաքանչյուր կետը բավարարում է խնդրի պայմաններին։

Երբեմն խնդիրը լուծելու համար բավական է կառուցել միայն մեկ երկրաչափական տեղ, որի երկրաչափական հատկությունը կօգնի խնդրի լուծմանը։ Ալստեղից երևում է, թե որքան կարևոր է իմանալ զանազան երկրաչափական տեղեր։ Այդ երկրաչափական տեղերի լավ իմանալը հաճախ օգնում է իսկույն տեսնել, թե որտեղ է գտնվում անհայտ կետը։ Բազմաթիվ երկրաչափական տեղերից կնշենք նրանք, որոնք համարվում են նախնական հայտնի փաստեր և օժանդակ դեր կարող են տանել կառուցման շատ խնդիրներ լուծելիս։

1. Տված կետից հավասարահեռ կետերի երկրաչափական տեղը մի շրջանագիծ է, որի կենտրոնը նույն այդ կետն է։ [1]

---

[1] Մենք դիտարկում ենք միայն հարթության վրա գտնվող կետերի երկրաչափական տեղերը։

2. Տված երկու կետերից հավասար հեռավորություն ունեցող կետերի երկրաչափական տեղն այդ երկու կետերը միացնող հատվածի միջնուղղահայացն է:
3. Ուղղից հավասարահեռ կետերի երկրաչափական տեղը այդ ուղղին տարված երկու զուգահեռ ուղիղներն են, որոնք գտնվում են տված ուղիղի տարբեր կողմերում և նրանից հավասարահեռ են:
4. Երկրաչափական տեղն այն կետերի, որոնց հեռավորությունների հարաբերությունն անկյան կողմերից հաստատուն մեծություն է, O գագաթով ճառագայթ է՝ առանց O կետի, որն անցնում է այդ կետերից որևէ մեկով: Մասնավոր դեպքում, եթե կետերը հավասարապես են հեռացած անկյան կողմերից, ապա այդ կետերի երկրաչափական տեղն անկյան կիսորդն է:
5. Եթե անկյան կողմերը հատող զուգահեռ ուղիղներից անկյան ներսում առաջացած հատվածները բաժանվում են տրված հարաբերությամբ, ապա նրանց բաժանող կետերի երկրաչափական տեղը ճառագայթ է, որի սկիզբն անկյան գագաթն է և անցնում է այդ հատվածներից մեկը բաժանող կետով:
6. Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որտեղից տրված հատվածը երևում է տրված անկյան տակ, շրջանագծի աղեղ է, որը ձգում է այդ հատվածն իրրև լար:
7. Տված շրջանագծի մեջ հավասար լարերի միջնակետերի երկրաչափական տեղը տված շրջանագծին համակենտրոն շրջանագիծ է, որը շոշափում է այդ լարերը:
8. Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որտեղից շրջանագիծը երևում է միևնույն անկյան տակ, տված շրջանագծին համակենտրոն շրջանագիծ է:
9. Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որտեղից տված շրջանագծին տարած շոշափողների երկարություններն ունեն միևնույն հաստատուն մեծությունը, տրված շրջանագծին համակենտրոն շրջանագիծ է:

10. Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունների քառակուսիների գումարը տված A և B կետերից հավասար է a^2 հաստատունին, շրջանագիծ է, որոշակի շառավղով և կենտրոնով:

11. Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունների հարաբերությունը տրված A և B կետերից $\frac{m}{n}$ հաստատուն մեծությունն է, շրջանագիծ է՝ որոշակի շառավղով և որոշակի կենտրոնով (**Ապոլլոնյան շրջանագիծ**):

12. Երկրաչափական տեղն այն կետերի, որոնցից տրված երկու շրջանագծերին տարած շոշափողներն իրար հավասար են, ուղիղ գիծ է, որն ուղղահայաց է նրանց կենտրոնագծին, նրա որոշակի կետում: Այդ ուղիղը կոչվում է տվյալ շրջանագծերի **արմատական առանցք** (Խնդիր N 40):

Ձևափոխման մեթոդ

Հաճախ հաջողվում է հասնել խնդրի լուծմանը պատկերների ձևափոխման (շարժման) օգնությամբ: Շատ դեպքերում, այդ մեթոդի կիրառությունը կարելի է նախատեսնել առաջին իսկ հայացքից: Նրա էությունն այն է, որ տրված կամ որոնելի պատկերը և կամ նրանց որևէ մասը փոխարինվում է մի նոր պատկերով, որը նախկինի հետ կապված է որոշակի կառուցմամբ և հնարավորություն տալիս լուծելու խնդիրը կամ մոտենալու խնդրի լուծմանը: Այստեղ կդիտարկենք այնպիսի ձևափոխություններ, որոնց դեպքում պահպանվում են կետերի հեռավորութունները, որի շնորհիվ էլ նոր պատկերը հավասար է դառնում հինին (նրանից տարբերվում է միայն դիրքով): Այդպիսի ձևափոխությունները կոչվում են **տեղափոխություններ:** Նրանց թվին են պատկանում.

ա) **զուգահեռ տեղափոխում**, երբ պատկերի բոլոր կետերը տեղափոխվում են միատեսակ ուղղված, զուգահեռ և հավասար հատվածներով:

բ) **պտույտ,** որի դեպքում կետերից մեկը մնում է անշարժ, իսկ նրանից ելնող բոլոր կիսաուղիղները պտտվում են նրա շուրջը միննույն ուղղությամբ՝ տվյալ անկյունով:

գ) **համաչափություն կետի նկատմամբ**, կամ պտույտ 180°-ով:

դ) **համաչափություն ուղիղի նկատմամբ**, երբ այդ ուղիղը մնում է անշարժ, իսկ պատկերը պտտվում է նրա շուրջը, որպես առանցքի շուրջ և նորից ընկնում է հարթության վրա իր հակառակ երեսով (կողմով):

Առաջին երեք տեղափոխումները կարելի է իրականացնել անընդհատ շարժումով, առանց դուրս գալու հարթությունից: Անընդհատ զուգահեռ տեղափոխումների դեպքում պատկերի կետերը գծում են զուգահեռ ուղիղներ, հատվածներ, իսկ անընդհատ պտույտի դեպքում՝ համակենտրոն շրջանագծեր: Կարծես թե մենք ստանում ենք ամբողջ պատկերի երկրաչափական տեղը:

Համաչափությունը կարելի է պարզապես որոշել՝ առանց դիմելու շարժման:

ա) Կետի նկատմամբ համաչափությունում այն հատվածները, որոնք միացնում են երկու հսմաչափ կետերը համաչափության անշարժ կենտրոնի հետ, հավասար են և կենտրոնից ուղղված են դեպի տարբեր կողմերը:

բ) Ուղիղի նկատմամբ համաչափությունում երկու համաչափ կետերից համաչափության անշարժ առանցքի վրա իջեցրած ուղղահայացներն ունեն ընդհանուր հիմք, հավասար են և գտնվում են առանցքի տարրեր կողմերում:

Նկատենք, որ վերոնշյալ ձևափոխություններով, ըստ էության, սպասվում են բոլոր հնարավոր տեղափոխությունները, քանի որ յուրաքանչյուր տեղափոխություն կամ վերադրում հանգում է զուգահեռ տեղափոխման, պտույտի և, եթե անհրաժեշտ է, համաչափության՝ ուղիղի նկատմամբ:

Նմանության մեթոդ

Կառուցման շատ խնդիրների լուծումը հիմնված է նման պատկերների հատկությունների վրա: Այդ հատկությունների վրա է հիմնված, ամենից առաջ, մի քանի երկրաչափական տեղերի արտածումը: Սակայն ավելի հաճախ հարկ է լինում դրանք կիրառել որպես ձևափոխման մեթոդ:

Նմանության մեթոդի կիրառման սովորական եղանակն այն է, որ որոնելի պատկերին ներկայացվող պահանջների մի մասը դեն է նետվում, այնպես, որ մնացած պահանջներին բավարարում են որոնելիին նման անթիվ բազմությամբ պատկերներ: Կառուցելով դրանցից մեկը, այնուհետև կարող ենք նրանից անցնել որոնելիին: Վերջին գործողությունը պահանջում է նման պատկերների փոխադարձ դասավորության որոշ ուսումնասիրություն:

Պարզագույն փոխադարձ դասավորությունը **նման դասավորությունն** է կամ **նմանադրությունը** (հոմոթետիա): Երկու պատկերներ կոչվում են **նման դասավորված** կամ **նմանադիր** (հոմոթետիկ), եթե նրանք նման են և նրանց համապատասխան ուղիղները՝ զուգահեռ: Երկու նմանադիր պատկերների համապատասխան կետերը միացնող ուղղիները զուգամիտում են միևնույն կետում, որը կոչվում է **նմանության կետրոն**: Այդ պատկերների համապատասխան հատվածները կա՛մ բոլորը միատեսակ ուղղություն ունեն, և կա՛մ բոլորը՝ հակառակ: Առաջին դեպքում համապատասխան կետերը դասավորված են նմանության կետրոնի մեկ կողմում, երկրորդ դեպքում՝ տարբեր կողմերում: Դրան համապատասխան տարբերվում են ուղիղ և հակադարձ նմանադիր դասավորություն: Նմանության կենտրոնի հետ համապատասխան կետերը միացնող հատվածների հարաբերությունը հավասար է պատկերների համապատասխան հատվածների հարաբերությանը: Այդ հարաբերությունը կոչվում է **նմանության գործակից**:

Այսպիսով, տրված պատկերին նման պատկեր կառուցելու համար, եթե հայտնի են նմանության կենտրոնը և նմանության գործակիցը, անհրաժեշտ է բոլոր հատվածները, որոնք միացնում են տրված պատկերի կետերը նմանության կենտրոնի հետ, որոշակի հարաբերությամբ ձգել կամ սեղմել:

Եթե տվյալների և որոնելիների միջև եղած կապը հենց սկզբից անորոշ է, ապա պետք է փորձել նրանց միջև ստեղծել մի քանի միջանկյալ օղակներ: Քանի որ այդ կապերը մեզ հայտնի չեն, պարզ է, որ մենք այդ օղակները վստահությամբ նշել չենք կարող և ստիպված ենք դատել՝ խարխափելով: Սակայն համբերատար և ուշադիր վերաբերմունքով մեզ կհաջողվի գտնել պահանջվող կապը: Խնդրի այսպիսի կշռադատումը կոչվում է **վերլուծություն**:

Կառուցումից հետո նախ հարկավոր է ստուգել, թե թույլ չի տրված արդյոք որևէ թերատություն, որի հետևանքով կարող է ստացվել միայն լուծումների մի մասը: Այնուհետև հարկավոր է բացահայտել, թե քանի լուծում է ստացվում այս կամ այն տվյալների դեպքում: Այդ մասը կոչվում է լուծման **հետազոտում**:

Թեև կառուցմանը նախորդում է խնդրի կշռադատումը, այնուամենայնիվ օգտակար է որոշ դեպքերում ստուգել, թե իրո՞ք պատկերի կառուցումը բավարարում է խնդրի պայմաններին: Որպես սխալի աղբյուր կարող է ծառայել կառուցվելիք պատկերի նախնական սխալ պատկերումը, որով առաջնորդվել ենք վերլուծությունը կատարելիս, կամ հապճեպ կատարված վերլուծությունը և այլն:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

Դիցուք, a, b, c-ն տրված հատվածներ են: Օգտվելով երկրաչափության դասընթացի հայտնի թեորեմներից (Պյութագորասի, Թալեսի և այլն), կարկինի և քանոնի օգնությամբ կառուցել բանաձևով տրված x հատվածը (1-12).

1. $x=\sqrt{a^2+b^2}$:

2. $x=\sqrt{c^2-b^2}$ $(c>b)$:

3. $x=\sqrt{ab}$:

4. $x=\dfrac{ab}{c}$:

5. $x=\sqrt{2}a$:

6. $x=\sqrt{10}\,b$:

7. $x=\sqrt{2a^2+5b^2}$:

8. $x=\dfrac{a^2+b^2}{c}$:

9. $x=\sqrt{ab+cd}$:

10. $x=\dfrac{abc}{de}$:

11. $x=\sqrt[4]{abcd}$:

12. $x=\sqrt{a^2+\dfrac{b^4}{a^2}}$:

13. Կառուցել տրված շառավղով այն շրջանագիծը, որն անցնում է տրված երկու կետերով:

14. Կառուցել եռանկյուն՝ տրված երկու կողմերով և նրան արտագծած շրջանագծի շառավղով:

15. Կառուցել հավասարակողմ եռանկյուն՝ կողմնային կողմով (սրունքով) և հիմքին առընթեր անկյունով:

16. Կառուցել տրված եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը:

17. Կառուցել տրված եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը:

18. Կարկինի և քանոնի միջոցով կառուցել .

ա) 90^0, բ) 60^0, գ) 45^o, ե) 15^0

մեծությամբ անկյուններ:

19. Կառուցել եռանկյուն ըստ երկու կողմերի և նրանցից մեկին տարված միջնագծի:

20. Կառուցել եռանկյուն ըստ երկու կողմերի և երրորդ կողմին տարված միջնագծի:

21. Կառուցել ուղղանկյուն եռանկյուն ըստ ներքնաձիգի և նրան տարված բարձրության:

22. Կառուցել եռանկյուն ըստ երկու կողմերի և երրորդ կողմին տարված բարձրության:

23. Կառուցել հավասարասրուն եռանկյուն ըստ հիմքի և արտագծած շրջանագծի շառավղի:

24. Կարկինով և քանոնով տրված հատվածը բաժանել.
ա) հինգ հավասար մասերի, բ) n հավասար մասերի $(n \geq 2)$:

25. Կառուցել եռանկյունը, եթե տրված են կողմը, նրան առընթեր անկյուններից մեկը և մյուս երկու կողմերի գումարը:

26. Կառուցել եռանկյունը, եթե տրված են կողմը, նրան առընթեր անկյուններից մեկը և մյուս երկու կողմերի տարբերությունը:

27. Կառուցել ուղղանկյուն եռանկյուն ըստ էջի և մյուս էջի ու ներքնաձիգի գումարի:

28. Տրված շրջանագծից դուրս (համապատասխան շրջանից դուրս) գտնվող A կետով տանել այդ շրջանագծին շոշափող ուղիղ:

29. Տրված են երկու շրջանագծեր: Կառուցել նրանց ընդհանուր շոշափողը:

30. Տրված են a ուղիղը և նրան չպատկանող A և B կետերը: a ուղղի վրա կառուցել A և B կետերից հավասարահեռ կետը: Արդյո՞ք խնդիրը միշտ լուծում ունի:

31. Կառուցել կետ, որը կգտնվի տրված շրջանագծի վրա և հավասարահեռ լինի տրված հատվածի ծայրակետերից: Քանի՞ լուծում կարող է ունենալ խնդիրը:

32. A և B կետերը գտնվում են a ուղղի մի կողմում: Գտնել a ուղղի այն M կետը, որի դեպքում $AM+MB$ գումարը փոքրագույնն է:

33. Տրված շրջանագծի վրա կառուցել այնպիսի կետ, որը հավասարահեռ լինի տրված երկու հատվող ուղիղներից: Քանի՞ լուծում կարող է ունենալ խնդիրը:

34. Տրված են զույգ առ զույգ հատվող երեք ուղիղներ, որոնք չեն անցնում մի կետով: Գտնել (կառուցել) բոլոր այն կետերը, որոնք հավասարահեռ են այդ ուղիղներից: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը:

35. Տրված են O կենտրոնով շրջանագիծ և այդ շրջանից դուրս՝ A կետը: A կետով տանել (կառուցել) այնպիսի ուղիղ, որը շրջանագիծը հատի այնպիսի B և C կետերում, որտեղ $AB=BC$: Արդյո՞ք խնդիրը միշտ լուծում ունի:

36. Կառուցել եռանկյուն ըստ կողմի, նրան տարված բարձրության և մյուս երկու կողմերից մեկին տարված միջնագծի:

37. Կառուցել եռանկյուն ըստ պարագծի և երկու անկյունների:

38. Կառուցել եռանկյուն ըստ պարագծի, անկյուններից մեկի և մյուս անկյան գագաթից տարված բարձրության:

39. Կարկինի և քանոնի միջոցով 54^0 մեծությամբ անկյունը բաժանել երեք հավասար անկյունների:

40*. Տրված են O_1 և O_2 կենտրոններով երկու շրջանագիծ, որոնց համապատասխան շրջանները չունեն ընդհանուր կետ: Գտնել (կառուցել) բոլոր այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնցից յուրաքանչյուրից այդ շրջանագծերին տարված շոշափողների հատվածները (որոնելի կետից մինչև շոշափման կետը միացնող հատվածները) միմյանց հավասար են:

41. Տրված են երեք շրջանագծեր, որոնց համապատասխան շրջանները զույգ առ զույգ չունեն ընդհանուր կետ: Կառուցել այն կետը, որից՝ այդ շրջանագծերին տարված շոշափողների հատվածները միմյանց հավասար են: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը:

42. Ինչպե՞ս վերականգնել եռանկյունը, եթե տրված են նրա կողմերի M, N, K միջնակետերը:

43. Կառուցել եռանկյուն ըստ երեք միջնագծերի:

44*. Տրված է շրջանագիծ և նրա վրա նշված է A կետը: Ի՞նչ պատկեր է իրենից ներկայացնում A կետով անցնող բոլոր լարերի միջնակետերի երկրաչափական տեղը: Կառուցել այդ պատկերը:

45*. Կառուցել ABC եռանկյունը ըստ A գագաթից տարված բարձրության և միջնագծի և C գագաթից տարված բարձրության:

46*. Կառուցել ABC եռանկյունը ըստ A և B գագաթներից տարված բարձրությունների և C գագաթից տարված միջնագծի:

47*. Կառուցել ABC եռանկյունը ըստ նրա AB կողմի, C գագաթից տարված բարձրության և անկյան կիսորդի:

48. Կառուցել եռանկյուն ըստ կողմի, նրա հանդիպակաց անկյան և այդ անկյան գագաթից տարված բարձրության:

49. Տրված ABC եռանկյան ներսում նշել այնպիսի M կետ, որից AB, BC և CA կողմերն ունեցած հեռավորությունները հարաբերեն ինչպես 1:2:3:

50*. Կառուցել M կետն այնպես, որ նրա հեռավորությունները տրված A, B և C կետերից հարաբերեն ինչպես 1:2:3:

51*. Կառուցել եռանկյուն ըստ միևնույն գագաթից ելնող բարձրության, անկյան կիսորդի և միջնագծի:

52*. Կառուցել եռանկյուն ըստ երկու կողմերի և նրանց ընդհանուր գագաթից ելնող կիսորդի:

53. Կառուցել ABC եռանկյունը, եթե տրված են $\angle A$-ն, $\angle C$-ն և AC կողմի ու BH բարձրության գումարին հավասար հատվածը:

54*. Կառուցել եռանկյունն ըստ երեք բարձրությունների:

55. Կառուցել այն շրջանագիծը, որն անցնում է տրված անկյան ներսում գտնվող տրված կետով և շոշափում է անկյան կողմերը: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը:

56. Կառուցել շրջանագիծ, որն անցնում է տրված երկու կետերով և շոշափում է տրված ուղիղը:

57. Շրջանի ներսում տրված է M կետը: Կառուցել M կետով անցնող այնպիսի լար, որն այդ կետով անցնող լարերից լինի փոքրագույնը:

58. Հարթության վրա տրված են A_1, B_1 և C_1 կետերը, որոնք ABC սուրանկյուն եռանկյան A, B և C գագաթներից տարված բարձրությունների շարունակությունների հատման կետերն են այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի հետ: Վերականգնել (կառուցել) ABC եռանկյունը:

59*. Կառուցել ABC եռանկյունը, եթե տրված են A գագաթից տարված բարձրության, անկյան կիսորդի և միջնագծի շարունակությունների հատման H, L և M կետերը ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի հետ:

60*. Տրված են երեք կետեր, որոնք չեն գտնվում միևնույն ուղղի վրա: Կառուցել եռանկյուն, որի համար այդ կետերը լինեն բարձրությունների հիմքերը: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը:

61. Տրված են a ուղիղը և նրա մի կողմում՝ B և C կետերը: Կառուցել շրջանագիծ, որն անցնում է B, C կետերով և շոշափում է a ուղիղը:

62. Տրված են a ուղիղը, նրա մի կողմում՝ B կետը և շրջանագիծը: Կառուցել շրջանագիծ, որն անցնում է B կետով և շոշափում է a ուղիղն ու տրված շրջանագիծը:

63. Կառուցել քառանկյուն ըստ երեք կողմերի միջնակետերի:

64. Կառուցել շեղանկյուն ըստ կողմի և բարձրության:

65. Կառուցել սեղան ըստ չորս կողմերի:

66. Կառուցել սեղան ըստ հիմքերի և անկյունագծերի:

67. Կառուցել $ABCD$ քառանկյունը ըստ չորս կողմերի և AB և CD ուղիղների կազմած անկյան:

68. Կառուցել քառակուսին ըստ նրա չորս կողմերի վրա տրված մեկական կետերի (գագաթներից տարբեր):

69. Տրված եռանկյանը ներգծել քառակուսի այնպես, որ քառակուսու մի կողմը գտնվի եռանկյան տրված կողմի վրա:

70. Տրված ABC եռանկյան AB և BC կողմերի վրա գտնել այնպիսի K և M կետեր, որոնց դեպքում $AK = KM = MC$:

71. Տրված O կենտրոնով շրջանագծին ներգծել.
ա) կանոնավոր վեցանկյուն,
բ) կանոնավոր տասներկուանկյուն,
գ) կանոնավոր ութանկյուն:

* * *

Սովորաբար միայն քանոնով կառուցումներն իրականացվում են այն պայմանով, որ հարթության վրա նախապես պատկերված է որևէ օժանդակ պատկեր (երկու զուգահեռ հատվածներ, զուգահեռագիծ, քառակուսի, շրջանագիծ): Հարկ ենք համարում նշել, որ կառուցումների տեսության մեջ հաստատված է հետևյալ պնդումը՝ **եթե հարթության վրա տրված է որևէ շրջանագիծ իր կենտրոնով, ապա բոլոր այն կառուցումները, որոնք կարելի է իրագործել քանոնի և կարկինի օգնությամբ, կարող են իրականացվել միայն քանոնի օգնությամբ**:

Երկրաչափական կառուցումների տեսության մեջ ապացուցվում է նաև հետևյալ փաստը՝ **բոլոր այն կառուցումները, որոնք իրագործվում են կարկինի և քանոնի միջոցով, կարող են կատարվել միայն կարկինի միջոցով**:

72. Տրված է ABC եռանկյունը և նշված են նրա երկու կողմերի M և N միջնակետերը: Միայն քանոնի օգնությամբ գտնել (կառուցել) երրորդ կողմի միջնակետը:

73. Տրված են երկու զուգահեռ ուղիղներ, որոնցից մեկի վրա նշված են M և N կետերը: Միայն քանոնի օգնությամբ գտնել (կառուցել) MN հատվածի միջնակետը:

74. Հարթության վրա տրված են զուգահեռ ուղիղների վրա գտնվող, միմյանց ոչ հավասար, AB և CD հատվածները: Միայն քանոնի օգնությամբ կառուցել այդ հատվածների միջնակետերը:

75. Հարթության վրա տրված են a և b զուգահեռ ուղիղները ու նրանց չպատկանող M կետը: Միայն քանոնի միջոցով M կետով տանել a և b ուղիղներին զուգահեռ ուղիղ:

76. Հարթության վրա տրված է 1 կողմով կանոնավոր վեցանկյուն: Միայն քանոնի միջոցով կառուցել.
ա) 2, բ) $\sqrt{3}$, գ) $\sqrt{13}$, դ) $\sqrt{7}$
երկարությամբ հատված:

77. Հարթության վրա տրված են շրջանագիծն իր AB տրամագծով և այդ շրջանից դուրս գտնվող M կետը: Միայն քանոնի միջոցով M կետից տանել AB ուղղին ուղղահայաց ուղիղ:

78. Միայն քանոնի օգնությամբ տրված AB հատվածը բաժանել երեք հավասար մասերի, եթե նշված է AB հատվածի M միջնակետը:

79. Հարթության վրա պատկերված են երկու հատվող շրջանագծեր (կենտրոնները նշված չեն): Միայն քանոնի օգնությամբ կառուցել այդ շրջանագծերի կենտրոնները:

80. Տրված են AB հատվածի A և B ծայրակետերը: Օգտվելով միայն կարկինից, կառուցել AB ուղղի այնպիսի M կետ, որ $AM = 2 \cdot AB$:

81. Օգտվելով միայն կարկինից, հարթության վրա նշել միևնույն ուղղին պատկանող երեք կետ:

82. Տրված a ուղղի վրա նշված են B և C կետերը ու նրան չպատկանող A կետը: Միայն կարկինի օգնությամբ կառուցել A կետի համաչափն a ուղղի նկատմամբ:

83. Օգտվելով միայն կարկինից, տրված կենտրոնով տրված շրջանագիծը բաժանել չորս հավասար աղեղների (**Նապոլեոնի** խնդիրը):

§ 8 ԱՍՈՒՅԹՆԵՐ, ՊՆԴՈՒՄՆԵՐ

Նախնական տեղեկություններ

Որևէ իրադրություն նկարագրելու կամ մեկնաբանելու համար մարդն իր դատողություններն արտահայտում է որոշակի նախադասություններով, որոնցից շատերը ներկայացնում են այս կամ այն փաստի կամ օրինաչափության հաստատումը, հիմնավորումը, մեկ բառով՝ **պնդումը**: Պնդումները կարող են վերաբերել նաև առարկաների դասերին, այդ դեպքում պնդումն արտահայտվում է փոփոխականների միջոցով:

Ասույթ են անվանում ամեն մի պնդում, որի մասին իմաստ ունի ասել, որ այն ճշմարիտ է կամ՝ կեղծ: «Ասույթ» բառի փոխարեն հաճախ գործածվում է «պնդում» արտահայտությունը: Բերենք ասույթների մի քանի օրինակ:

«29-ը պարզ թիվ է»,

«$\sqrt{47} > 7$»,

«Արմենը 15 տարեկան է»,

«Արշակը լողորդ է»,

«Վարունգը բանջարեղեն է»,

«Գայլն ընտանի կենդանի է»,

«Փարիզը Հունգարիայի մայրաքաղաքն է» և այլն:

Կարճության համար ասույթն ամբողջությամբ նշանակվում է լատինական այբուբենի որևէ գլխատառով՝ A, B, C, ... :

Ունենալով որևէ P ասույթ, կարելի է կազմել նոր ասույթ՝ P ասույթի ***ժխտում***: Այն նշանակվում է $\overline{P}$-ով (կարդում են *«P* գծիկով», կամ՝ ոչ *P),* որը ճշմարիտ է, եթե P ասույթը կեղծ է, և՝ հակառակը, կեղծ է, եթե P-ն ճշմարիտ է:

Օրինակներ . 1) եթե $P =$«119-ը պարզ թիվ է», ապա $\overline{P}$ = {119-ը պարզ թիվ չէ»:

2) եթե $q =$« $ABCD$ » քառանկյան յուրաքանչյուր անկյունը փոքր է 110°-ից», ապա

$\overline{q} =$« $ABCD$ » քառանկյան անկյուններից գոնե մեկը փոքր չէ 110° -ից»,

3) եթե A =«Հռոմն Իտալիայի մայրաքաղաքը չէ», ապա $\overline{A}$ = «Հռոմն Իտալիայի մայրաքաղաքն է»,

4) եթե B = «Արշավախմբի մասնակիցներից յուրաքանչյուրի տարիքը չի գերազանցում 40-ը», ապա $\overline{B}$ = «Արշավախմբում կա մարդ, որի տարիքը 40-ից մեծ է»:

Ունենալով երկու (կամ ավելի) ասույթներ, նրանց միավորմամբ կարելի է կազմել բարդ ասույթներ՝ գործածելով, այսպես կոչված, տրամաբանական կապեր «ոչ» նախածանցը, «և», «կամ» շաղկապները, «եթե..., ապա...», «այն և միայն այն դեպքում...» բառակապակցությունները[1]:

Դպրոցական մաթեմատիկայի դասընթացում ներառված թեորեմները և ապացուցման խնդիրները ճշմարիտ պնդումներ են: Թեորեմների ձևակերպումներն ունեն **«Եթե..., ապա...»** տեսքը, իսկ ապացուցման խնդիրները **«Ապացուցել, որ...»** տեսքը:

Սովորողների մտավոր զարգացման և, ընդհանրապես, մաթեմատիկական գիտելիքների և կուլտուրայի ձևավորման գործում օգտակար դեր կարող են տանել այսպիսի ձևակերպումներով խնդիրները.

«Ճ՞իշտ է, արդյոք, հետևյալ պնդումը՝ ...»,

«Հիմնավորել կամ հերքել պնդումը՝...»,

որոնցում ձևակերպված պնդումները կարող են լինել ինչպես ճշմարիտ, այնպես էլ՝ ոչ ճշմարիտ: Օգտակար են նաև այսպիսի տեքստերով խնդիրները.

«Գոյություն ունի՞, արդյոք,...»,

«Հնարավո՞ր է ընտրել...»:

---

[1] *Ասույթների վերաբերյալ տեսական տեղեկատվությունը զետեղված է «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր-11 (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար» դասագրքի 3-րդ գլխում: Այդ նկատառումով էլ այստեղ տեսական նյութը չի ծավալվում:*

Այդպիսի առաջադրանքները կատարելիս սովորողները գուշակում են համապատասխան ճշմարիտ պնդումը և փորձում հիմնավորել այն:

Վերոնշյալ ձևակերպումներով առաջադրանքները սովորողների մոտ կարող են առավել հետաքրքրություն առաջացնել մաթեմատիկայի նկատմամբ, քանի որ նրանք սկսում են ինքնուրույն վերլուծություններ և բացահայտումներ անել:

Մաթեմատիկան ուսումնասիրելիս, հիմնականում, մենք գործ ենք ունենում մեկ կամ մի քանի փոփոխական պարունակող պնդումների հետ:

Օրինակ, **«n^2+4n արտահայտության արժեքը բնական n-ի դեպքում բաժանվում է 4-ի»** պնդումը կախված է n փոփոխականից: Պարզ է, որ n-ի յուրաքանչյուր զույգ արժեքի դեպքում ստացվում է ճշմարիտ պնդում (ճշմարիտ ասույթ), իսկ ամեն մի կենտ արժեքի դեպքում՝ կեղծ պնդում (կեղծ ասույթ):

Փոփոխական պարունակող **«$P(x),\ x \in M$»** նախադասությունը, ընդհանրապես ասած, ասույթ չէ: Սակայն, ենթադրվում է, որ յուրաքանչյուր ֆիքսված $x_0 \in M$ տարրի համար ստացված «$P(x_0)$» նախադասությունն ասույթ է:

Օրինակ, **«Ցանկացած $x \in N$ դեպքում x^3-5x արտահայտությունը բաժանվում է 6-ի»** պնդումը ասույթ չէ: Մասնավորաբար, $x=4$ արժեքի դեպքում ստացված **«34-ը բաժանվում է 6-ի»** պնդումն ասույթ է:

Դպրոցական դասագրքերում և խնդրագրքերում ավելի հաճախ հանդիպում են ճշմարիտ պնդումներ (թեորեմների կամ ապացուցման խնդիրների տեսքով): Սովորողի խնդիրն է՝ յուրացնել թեորեմների ապացուցումները և փորձել ինքնուրույն հաստատել ապացուցման խնդիրների բովանդակությունը ներկայացնող պնդումները:

Խնդիրը համեմատաբար այլ է գիտական հետազոտության մեջ: Այստեղ հետազոտողին անհրաժեշտ է լինում ձևակերպել պնդումներ, որոնց նա հանգում է ուսումնասիրությունների արդյունքում: Այդպիսի պնդումները կարող են լինել ինչպես ճշմարիտ, այնպես էլ ոչ ճշմարիտ:

Եթե չի հաջողվում հաստատել (ապացուցել) տվյալ պնդումը, ապա բնական է, որ պետք է առաջանա կասկած՝ գուցե այն ճշմարիտ չէ: Նման դեպքում փորձ է արվում հերքել համապատասխան պնդումը: Մաթեմատիկական յուրաքանչյուր թեորեմի մեջ խոսվում է ոչ թե մեկ օբյեկտի, այլ, հիմնականում, անվերջ բազմությամբ նմանատիպ օբյեկտների մասին: Օրինակ. **«Շրջանագծին ներգծված քառանկյան հանդիպակաց անկյունների գումարը հավասար է 180°-ի»** թեորեմի (ճշմարիտ պնդման) մեջ խոսվում է ոչ թե կոնկրետ, առանձին վերցված մեկ քառանկյան, այլ ցանկացած շրջանագծին ներգծված կամայական քառանկյան մասին (որոնք, ակնհայտորեն, անվերջ են): Այստեղ էական ենք համարում նշել հետևյալ հանգամանքը. եթե պնդման մեջ օգտագործվում է որևէ հասկացության ընդհանուր անվանումը (մեր օրինակում «շրջանագիծ» և «քառանկյուն»), ապա նկատի են առնվում այդ հասկացության ծավալի մեջ մտնող բոլոր օբյեկտները, թեև հնարավոր է, որ ձևակերպման մեջ **«բոլոր», «ցանկացած»** («կամայական») բառերը նշված չլինեն: Թեորեմի ձևակերպման վերաբերյալ այս ըմբռնումը հիմք է տալիս կողմնորոշվելու, թե անհրաժեշտության դեպքում ինչպես կարելի է հաստատել որոշակի առանձնահատկությամբ ձևակերպված (բայց չապացուցված) պնդման անճշտությունը:

Կարևոր ենք համարում, որ սովորողների գիտակցության մեջ ամրապնդվի հետևյալ փաստը. **պնդումը համարվում է ճշմարիտ այն և միայն այն դեպքում, եթե այն ճշմարիտ է բոլոր (առանց բացառության) այն օբյեկտների համար, որոնց վերաբերում է տվյալ պնդումը:** Եթե շատ (նույնիսկ անվերջ) դեպքերի համար պնդումը ճիշտ է, սակայն թեկուզ մեկ դեպքի համար այն տեղի չունի, ապա ձևակերպված պնդումը համարվում է կեղծ (սխալ): Հետևաբար, որպեսզի հերքենք ընդհանրական իմաստ ունեցող մաթեմատիկական որևէ պնդում, այսինքն, ցույց տանք, որ այն ճշմարիտ չէ, լիովին բավական է հաստատել նրա կեղծ լինելն առանձին վերցված մեկ մասնավոր դեպքի համար: Այլ կերպ ասած, բավական է կառուցել հերքող մեկ օրինակ (հակաօրինակ):

Նկատենք, որ վերևում բերված n փոփոխականով պնդումը ճշմարիտ չէ: Իրոք, վերցնելով, օրինակ, $n=1$ արժեքը , ստանում ենք $n^2+4n=1^2+4\cdot 1=5$, որը չի բաժանվում 4-ի:

«Եթե p և q թվերը պարզ են, ապա $p+q$ թիվը բաղադրյալ է» պնդումը ճշմարիտ չէ, քանի որ, օրինակ, $p=2$ և $q=3$ արժեքների դեպքում ստացված ասույթը ճշմարիտ չէ:

Մարդիկ երկար ժամանակ համարում էին, որ բոլոր կարապները սպիտակ են: Այդ պնդումը հերքվեց, երբ Ավստրալիայում հայտնաբերվեց սև կարապ:

Հերքվող օրինակի որոնումը հաճախ արժեքավոր է ոչ միայն այն բանի համար, որ այն սովորողներից պահանջում է ոչ ձևական, խելամիտ մոտեցում, այլ նաև նրանով, որ նրանց ստիպում է անցկացնել ինքնատիպ փորձարկում, որն էլ նպաստում է գործնական փորձի ձեռքբերմանը: Ցանկալի է, որ մաթեմատիկայի նկատմամբ հետաքրքրասիրություն ցուցաբերող աշակերտները որոշ չափով տեղեկանան նաև պնդումներին վերաբերող տրամաբանության տարրերին: Օրինակ, այսպիսի հակիրճ տեղեկություն:

Դիցուք, P-ն ինչ-որ օբյեկտների բազմություն է (օբյեկտները կարող են լինել թվեր, ծառեր, մարդիկ և այլ առարկաներ): Այդ բազմության ամեն մի օբյեկտը կարող է օժտված լինել կամ չլինել մի որոշ A հատկությամբ: Օրենքն այսպիսին է. **ճիշտ կարող է լինել կա'մ պնդումը, կա'մ նրա հերքումը** (բացառումը), այսինքն երկուսից մեկը, և միայն մեկը (տրամաբանության մեջ այն կոչվում է **երրորդի բացառման օրենք**): Ընդունվում է, որ դասընթացում գործածվող յուրաքանչյուր պնդում կա'մ ճշմարիտ է, կա'մ ոչ ճշմարիտ (կեղծ):

Կեղծ պնդումները հերքելու համար մենք, ըստ էության, օգտվում ենք ստորև բերված աղյուսակից, որը վերոհիշյալ դատողությունների հակիրճ ձևակերպումն է մաթեմատիկական «լեզվով»:

Պնդումը	*Նրա բացառումը (հերքումը)*
P -ի բոլոր օբյեկտներն օժտված են A հատկությամբ: (P -ի ցանկացած օբյեկտ օժտված է A հատկությամբ):	*P -ի գոնե մեկ օբյեկտ օժտված չէ A հատկությամբ: (Գոյություն ունի P -ի այնպիսի օբյեկտ, որն օժտված չէ A հատկությամբ):*
P -ից որոշ օբյեկտներ օժտված են A հատկությամբ: (Գոյություն ունի P -ին պատկանող այնպիսի օբյեկտ, որն օժտված է A հատկությամբ):	*P բազմության ոչ մի օբյեկտ օժտված չէ A հատկությամբ: (P բազմության ցանկացած օբյեկտ օժտված չէ A հատկությամբ:)*

Մոլորություն կլինի կարծել, թե որևէ պնդման ճշմարիտ չլինելը կարելի է անմիջապես բացահայտել: Ինչպես թեորեմների ապացուցումը, այնպես էլ կեղծ պնդումների հերքումը պահանջում է վերլուծություններ և մտահանգումներ:

Ընդհանուր առմամբ, կեղծ պնդումները պայմանականորեն կարելի է բաժանել երկու խմբի»:

ա) ***Ակնհայտ կեղծ պնդումներ.*** այդպես կանվանենք այն պնդումները, որոնց կեղծ լինելը բացահայտվում է անմիջական փաստական ստուգման միջոցով: *Օրինակներ.*

1) 34-ը բաժանվում է 4-ի;

2) 117-ը պարզ թիվ է;

3) $3^5 > 200$;

4) 1,08-ը մեծ է 1,001-ից;

5) 2-ը $x^2 + 3x = 8$ հավասարման արմատ է;

6) եթե եռանկյան երկու անկյունները 40° և 45° են, ապա այն բութանկյուն եռանկյուն է և այլն:

բ) ***Ոչ ակնհայտ կեղծ պնդումներ.*** այդպես կանվանենք այն պնդումները, որոնց կեղծ լինելը բացահայտվում է տրամաբանական մտահանգումների միջոցով:

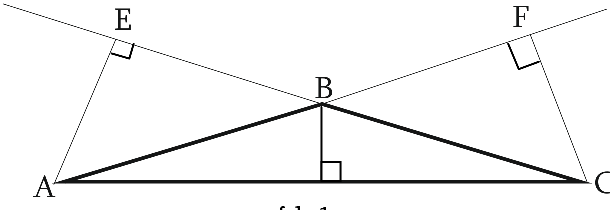
Ոչ ակնհայտ կեղծ պնդումներից առանձնահատուկ հետաքրքրություն են ներկայացնում հատկապես այն պնդումները, որոնք առաջին հայացքից թվում են ճշմարտանման և նրանց կեղծ լինելն ունի քողարկված և խաբուսիկ բնույթ: Բերենք լուսաբանող օրինակներ:

Օրինակ 1. Բնական թվերի շարքում հնարավոր չէ ընտրել միմյանց հաջորդող երկու հազար թվեր, որոնցում ոչ մի պարզ թիվ չլինի:

Առաջին հայացքից թվում է, թե այդ պնդումը ճշմարիտ է: Այն հերքելու համար բերենք հակօրինակ: Դժվար չէ նկատել, որ միմյանց հաջորդող հետևյալ 2000 թվերից յուրաքանչյուրը բաղադրյալ է.

$$2001!+2;\ \ 2001!+3;\ \ 2001!+4;\ \ ...;\ \ 2000!+2000;\ \ 2001!+2001:$$

Օրինակ 2. **«Եռանկյան երեք բարձրությունները հատվում են մեկ կետում»:** Այսպես են արտահայտում շատերը՝ եռանկյան բարձրությունների մասին հայտնի թեորեմը ձևակերպելիս: Այս պնդումը հերքելու համար բավական է բերել (կառուցել) եռանկյան այնպիսի օրինակ, որի համար նշված պնդումը կեղծ է: Վերցնենք որևէ ABC հավասարասրուն բութանկյուն եռանկյուն (նկ. 1): Ակնհայտ է, որ այդ եռանկյան BD, AE և CF բարձրությունները չունեն ընդհանուր կետ: Իրականում, համապատասխան թեորեմը (ճշմարիտ պնդումը) հետևյալն է. **եռանկյան երեք բարձրությունները պարունակող ուղիղները հատվում են մեկ կետում:**



նկ.1

* * *

Ուշագրավ է այն փաստը, որ նույնիսկ հանրահայտ մաթեմատիկոսներն իրենց գիտական հետազոտությունների ընթացքում ձևակերպել և հանրությանն են ներկայացրել այնպիսի պեդումներ (իրենց կարծիքով ճշմարիտ), որոնց կեղծ լինելու բացահայտումը առանձնակի դժվարություն չի եղել այլ մաթեմատիկոսների համար: Ֆրանսիացի հայտնի մաթեմատիկոս Պիեռ Ֆերման (որը մեծ ներդրումներ ունի մաթեմատիկայի զարգացման գործում) ձևակերպել է այսպիսի պնդում.

«Ցանկացած n բնական թվի համար $F(n)=2^{2^n}+1$-ը պարզ թիվ է»:

Հետագայում հայտնի մաթեմատիկոս Լեոնարդ Էյլերը հերքել է այդ պնդումը. նա ապացուցել է, որ $n=5$ դեպքում ստացված $F(5)=2^{32}+1$ թիվը բաղադրյալ է (բաժանվում է 641-ի):

Գիտության զարգացման ընթացքում մաթեմատիկոսների կողմից հաճախ առաջ են քաշվում պնդումներ, որոնց ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը հաստատվում են ավելի ուշ: Ավելին, դարեր առաջ ձևակերպված բազմաթիվ պնդումներ կան, որոնք շարունակվում են մնալ իբրև վարկածներ (հիպոթեզներ) և մինչև օրս դեռևս լուծված չեն: Այնպես որ, այդպիսի որևէ պնդման հաստատումը կամ հերքումը մեծ նվաճում կարող է լինել համաշխարհային մաթեմատիկայի կյանքում: Բերենք այդպիսի օրինակներ.

1) 10^n+3, $n\in N$ տեսքի թվերի մեջ պարզ թվերի քանակն անվերջ է:
2) Յուրաքանչյուր զույգ թիվ կարելի է ներկայացնել երկու պարզ թվերի տարբերության տեսքով:
3) $x^3+y^3+z^3=3$ հավասարման ամբողջ թվերով չորսից ավելի լուծում չունի
((1; 1; 1), (4; 4;–5), (4;–5;4) , (–5; 4; 4) լուծումները հայտնի են):
4) $x^3+y^3+z^3=30$ հավասարումն ամբողջ թվերով լուծում չունի:

* * *

Ստորև բերված առաջադրանքներից յուրաքանչյուրում աառաջին պնդումը ճիշտ է, իսկ երկրորդ պնդումը՝ սխալ (յուրաքանչյուր համարի տակ գտնվող երկրորդ պնդումն առաջինի հակադարձ պնդումն է)։ Այդ սխալ պնդումներից յուրաքանչյուրը հերքելու համար բավական է բերել մեկ օրինակ (հակօրինակ), որի համար պնդումը կեղծ է։
Այդպիսի առաջադրանքները կարող են նպաստել սովորողներին՝ հնարավորինս խուսափել սխալ եզրահանգումներ անելուց։

1. ա) Եթե $a=b$, ապա $a^2=b^2$։
   բ) Եթե $a^2=b^2$, ապա $a=b$։
2. ա) Եթե $a=b$, ապա $|a|=|b|$։
   բ) Եթե $|a|=|b|$, ապա $a=b$։
3. ա) Եթե $m=n$, ապա $a^m=a^n$ $(m;\ n;\ a\in N)$։
   բ) Եթե $a^m=a^n$, ապա $m=n$ $(m;\ n;\ a\in N)$։
4. ա) Եթե $x>y$ և $z>t$, ապա $x+z>y+t$։
   բ) Եթե $x+z>y+t$, ապա $x>y$ և $z>t$։
5. ա) Եթե $x>0$ և $y>0$, ապա $xy>0$։
   բ) Եթե $xy>0$, ապա $x>0$ և $y>0$։
6. ա) Եթե $a>b>0$, ապա $a^2>b^2$։
   բ) Եթե $a^2>b^2$, ապա $a>b>0$։
7. ա) Եթե $\sqrt{x}=a$, ապա $x=a^2$ ։
   բ) Եթե $x=a^2$, ապա $\sqrt{x}=a$։

Հարկ է նշել, որ նմանատիպ հարցերի քննարկումը սովորողներին հնարավորություն է տալիս խուսանավելու սերտողական բնույթի «գիտելիքներից», նպաստում է մաթեմատիկական կուլտուրայի ձևավորմանը, վերլուծական կարողություն ձեռք բերելուն, ինչպես նաև տրամաբանության զարգացմանը։

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

Ստորև բերված նախադասություններից յուրաքանչյուրը մաթեմատիկական պնդում է: Պահանջվում է հիմնավորել կամ հերքել համապատասխան պնդումը: Եթե պնդումը ճշմարիտ է, ապա պատասխանում նշվում է ***«ճիշտ է»****, իսկ եթե ճիշտ չէ, ապա* ***«սխալ է»*** *տարբերակը:*

1. 549051-ը պարզ թիվ է:

2. 2^{100} թիվն ունի ճիշտ 100 բաժանարար:

3. Ցանկացած բնական n թվի դեպքում 2^{n^2-n} թիվը զույգ է:

4. Գոյություն ունի այնպիսի բնական n թիվ, որի դեպքում $100n+1$ թիվը բնական թվի քառակուսի է:

5. Ցանկացած ամբողջ k թվի դեպքում $(k+5)(k+11)$ թիվը բաղադրյալ է:

6. Գոյություն չունի այնպիսի բնական m թիվ, որի դեպքում $5m+2$ -ը բնական թվի քառակուսի է:

7. Կարելի է ընտրել այնպիսի բնական n թիվ, որի դեպքում 6^n+7 -ը դառնա բնական թվի քառակուսի:

8. Գոյություն ունի այնպիսի բնական n թիվ, որի դեպքում ճիշտ է $n^2+n+1=2^{100}$ հավասարությունը:

9. Երեք հաջորդական բնական թվերի արտադրյալը կարող է հավասարվել 3^{20}-ի:

10. Երեք հաջորդական բնական թվերի գումարը կարող է հավասարվել 3^{101}-ի:

11. $2\cdot10^{30}+1$ թիվը պարզ է:

12. Բնական թվերի շարքում հնարավոր չէ ընտրել միմյանց հաջորդող 10000 թվեր այնպես, որ նրանց մեջ ոչ մի պարզ թիվ չլինի:

13. Գոյություն ունի միակ p պարզ թիվ, որի դեպքում $p+38$ և $p+58$ թվերը միաժամանակ պարզ են:

14. Եթե կոտորակի և՛ համարիչը և՛ հայտարարը մեծացնենք 1-ով, ապա կոտորակը կմեծանա:

15. Հնարավոր է ընտրել իրարից տարբեր հարյուր այնպիսի կոտորակներ, որոնց գումարը փոքր լինի 1-ից:

16. Գոյություն չունի այնպիսի բնական n թիվ, որի դեպքում

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=1$$

հավասարությունը ճիշտ լինի:

17. Եթե թիվը 1-ից փոքր է, ապա նրա հակադարձը մեծ է 1-ից:

18. Եթե $a^3=b^3$, ապա $a=b$:

19. Եթե $a^4=b^4$, ապա $a=b$:

20. Եթե $ac=bc$, ապա $a=b$:

21. Եթե $a+b=5$, ապա $a^2+b^2=25$:

22. Եթե $a>b$, ապա $a^3>b^3$:

23. Եթե $a>b$, ապա $a^4>b^4$:

24. Եթե երկու դրական թվերի արտադրյալը հավասար է 10-ի, ապա նրանցից յուրքանչյուրը փոքր է 10-ից:

25. Եթե երկու թվերի գումարը 20 է, ապա նրանցից յուրաքանչյուրը փոքր է 20-ից:

26. Եթե $\dfrac{a}{b}<1$, ապա $a<b$:

27. Եթե յոթ թվերի գումարը 120 է, ապա նրանցից գոնե մեկը մեծ է 17-ից:

28. Ցանկացած k ամբողջ թվի դեպքում $3^k \geq 3$

29. Գոյություն չունի այնպիսի n ամբողջ թիվ, որի դեպքում ճիշտ լինի $5^n<0,001$ անհավասարությունը:

30. Եթե $a+\dfrac{1}{a}=2$, ապա $a^7+\dfrac{1}{a^7}=2$:

31. Եթե $a+\dfrac{1}{a}=5$, ապա $a^2+\dfrac{1}{a^2}=25$:

32. Եթե $a-b=1$, ապա $(a+b)(a^2+b^2)=a^4-b^4$:

33. Ցանկացած a -ի դեպքում $\sqrt{(a+b)^2=a+5}$:

34. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$ թիվն ամբողջ է:

35. $\sqrt{28+10\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ թիվն ամբողջ չէ:

36. Ցանկացած a և b թվերի դեպքում $a^2+b^2>2ab$:

37. Ցանկացած a թվի դեպքում $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$:

38. Ցանկացած a թվի դեպքում $a^4 \geq a$:

39. Ցանկացած x թվի դեպքում $x^2+x+0,25\geq 0$:

40. Ցանկացած x -ի դեպքում $x^2-4x+4>0$:

41. Եթե a, b, c թվերը բավարարում են $b^2 = ac$ պայմանին, ապա այդ թվերը, նշված կարգով, կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա:

42. 3; 8; 13; ... թվաբանական պրոգրեսիայում գոյություն չունի այնպիսի անդամ, որն ամբողջ թվի քառակուսի է:

43. $\frac{1}{31}$, $\frac{2}{7}$ և $\frac{13}{5}$ թվերը կարող են լինել միևնույն թվաբանական պրոգրեսիայի անդամներ (ոչ անպայման հարևան):

44. 4; 27 և 49 թվերը չեն կարող լինել միևնույն երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամներ:

45. $n^3 + n = 30$ հավասարությունը ճիշտ է միայն $n = 3$ դեպքում:

46. Եթե $(x^2 - 4x)^2 = (2x^2 + x)^2$, ապա $x^2 - 4x = 2x^2 + x$:

47. $(x^2 - 1)^2 + (x^3 - 2x)^2 = 0$ հավասարումն արմատ չունի:

48. $5x^4 - 6x + 2x^2 - 8x + 1 = 0$ հավասարումը չունի բացասական արմատ:

49. $8x^3 + 8x + 5 = 0$ հավասարումն ունի ճիշտ երեք արմատ:

50. $x^4 - 13x^2 - 17 = 0$ հավասարման բոլոր արմատների գումարը հավասար է 13-ի:

51. Տրված է $x^8 - 5x^6 + 7x^4 - 3x^2 = 0$ հավասարումը:
ա) Հավասարումն ունի գոնե մեկ արմատ:
բ) Հավասարման արմատների քանակը զույգ է:
գ) Հավասարման արմատների գումարը հավասար է 5-ի:

52. $\sqrt{2x^2-4x}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-4x=(x-2)^2, \\ 2x^2-4x\geq 0 : \end{cases}$

53. $\sqrt{2x^2-4x}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\geq 0, \\ 2x^2-4x=(x-2)^2 : \end{cases}$

54. $\sqrt{x^2+6x}=3|x-5| \Leftrightarrow x^2+6x=9(x-5)^2$:

55. $(x+3)^2<36$ և $x+3<6$ անհավասարումները համարժեք են:

56. $|3x-5|<|2x+9|$ **և** $(3x-5)^2<(2x+9)^2$ անհավասարումները համարժեք են:

57. $\dfrac{x}{2x+3}<1$ և $x<2x+3$ անհավասարումները համարժեք են:

58. $\sqrt{x^2-4x}>x-3 \Leftrightarrow x^2-4x>(x-3)^2$:

59. $\sqrt{2x-4}<|x|+1 \Leftrightarrow 2x-6<(|x|+1)^2$:

60. $\sqrt[4]{x^2-4x}<-x$ անհավասարումը լուծում չունի:

61. $\sqrt{x^2-4x}<x-3 \Leftrightarrow x^2-4x>(x-3)^2$:

62. $y=|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը գտնվում է աբսցիսների առանցքից վերև:

63. $y=\dfrac{1}{x+2}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը չի հատում օրդինատների առանցքը:

64. $y=x^2-7x+10$ և $y=3x-16$ ֆունկցիաների գրաֆիկները չունեն ընդհանուր կետ:

65. Եռանկյան անկյուններից մեկը կարող է մեծ լինել 178^0 -ից:

66. Գոյություն ունի եռանկյուն, որի կողմերի երկարություններն են $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ և $\sqrt{23}$:

67. Եռանկյան օրթոկենտրոնը չի կարող գտնվել նրա կողմի վրա:

68. Եռանկյանը ներգծած շրջանագծի տրամագիծը փոքր է այդ եռանկյան յուրաքանչյուր կողմից:

69. Եռանկյան արտագծած շրջանագծի տրամագիծը մեծ է այդ եռանկյան յուրաքանչյուր կողմից:

70. Ցանկացած եռանկյան միջնագծերով կարելի է կառուցել եռանկյուն:

71. Ցանկացած եռանկյան բարձրություններով կարելի է կառուցել եռանկյուն:

72. Գոյություն ունի այնպիսի բազմանկյուն, որն ունի ճիշտ 180 անկյունագիծ:

73. Գոյություն չունի այնպիսի ուռուցիկ բազմանկյուն, որն ունենա երեքից ավելի սուր անկյուն::

74. Ուղղանկյուն եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնը ներքնաձիգի միջնակետն է:

75. ABC եռանկյան մակերեսը 32 է, M -ը եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է:

ա) AMB եռանկյան մակերեսը հավասար է 16-ի:

բ) ABC եռանկյան որևէ կողմի երկարությունը կարող է լինել 2000-ից մեծ:

գ) Եռանկյան երկու կողմերից յուրաքանչյուրի երկարությունը կարող է փոքր լինել **8**-ից:

76. Ուղղանկյուն եռանկյան պարագիծը 24 է, իսկ ներքնաձիգը 10:

ա) Այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը 6 է:

բ) Այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը 2 է:

77. Եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնը կարող է գտնվել այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի վրա:

78. $ABCD$-ն ուռուցիկ քառանկյուն է. M, N, P, K-ն համապատասխանաբար AB, BC, CD, DA կողմերի միջնակետերն են:
ա) $MNPK$ -ն զուգահեռագիծ է:
բ) $MNPK$ քառանկյան մակերեսը հավասար է 5-ի, եթե $ABCD$ քառանկյան մակերեսը 20 է:

79. Եթե եռանկյան երկու անկյունների կոսինուսների հարաբերությունը հավասար է այդ նույն անկյունների սինուսների հարաբերությանը, ապա այդ եռանկյունը հավասարասրուն է:

80. Եթե եռանկյան մեջ տեղի ունի

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta}$$

առնչությունը, ապա այն հավասարասրուն է:

81. Եթե եռանկյան մեջ տեղի ունի

$$b = 2a \cdot \cos\gamma$$

առնչությունը, ապա այդ եռանկյունը հավասարակողմ է:

82. O-ն $ABCD$ սեղանի $(BC \parallel AD)$ անկյունագծերի հատման կետն է:
ա) AOB և COD եռանկյունները հավասարամեծ են:
բ) $ABCD$ սեղանի մակերեսը հավասար է $(p+q)^2$, եթե հիմքերին առընթեր եռանկյունների մակերեսները p^2 և q^2 են:

83. $ABCD$ քառանկյան մեջ $AC = 9$, $BD = 11$: Այդպիսի քառանկյան մակերեսը չի կարող լինել 50:

84. Եռանկյան երեք բարձրություններից յուրաքանչյուրը փոքր է 1 մետրից: Այդպիսի եռանկյան մակերեսը կարող է մեծ լինել 1000 մ^2–ուց:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

§ 1. Ամբողջ թվերի բաժանելիությունը

9. 3: **10.** ա)-ն: **11.** դ)-ն: **12.** $n+4$ **:** **13.** $n=1$; $n=3$ **:** **14.** 34452; 34056; 34956:
15. 2430; 6435: **16.** 1: **17.** 5: **31.** 1: **43.** ա) $n=9$ **,** բ) $n=5$ **,** գ) $n=1$ **:**
48. Ոչ: **Ցուցում**: Նկատել, որ ցանկացած n-ի դեպքում

$$(n+1)^2 < n^2 + 3n + 1 < (n+2)^2 :$$

51. Ոչ: **52.** 9-ը: **53.** 11-ը: **55.** $\frac{p+1}{2}$ և $\frac{p-1}{2}$ **:**

56. ա) 16**;** բ) 20**;** գ) 55; դ) 2**;** ե) 270:

59. **Ցուցում**: Եթե d-ն n թվի բաժանարար է, ապա $\frac{n}{d}$ ևս բաժանարար է:

60. $n = 3k$ $(k \in N)$: **Ցուցում**: Դիտարկել երեք դեպք՝

$$n = 3k\,;\ n = 3k+1\,;\ n = 3k+2\,:$$

61. 499: **68.** Տե՛ս N 65 խնդիրը:
70. **Ցուցում**: Նկատել, որ ցանկացած n-ի դեպքում

$$(n+1)^3 < n^3 + 5n^2 + 11n + 10 < (n+3)^3 :$$

71. $\frac{5}{2}$ **:**

§ 2. Բաղդատումներ: Ֆերմայի փոքր թեորեմը

9. 1: **10.** 7: **11.** 1: **12.** 1: **13.** 7: **14.** 7: **15.** 216: **16.** 9: **31.** 3: **32.** 51: **33.** 88: **34.** 616: **35.** 1: **43.** Այո: **44.** Ոչ:
46. **Ցուցում**: Ապացուցել, որ ցանկացած n-ի դեպքում տրված արտահայտությունը 23-ի բազմապատիկ է:
47. **Ցուցում**: Երբ $p=2$, վերցնել՝ $n=2m$ $(m \in N)$**,** իսկ երբ $p>2$, վերցնել՝ $n=(p-1)(pm-1)$ $(m \in Z)$ **:**

§ 3. Հավասարումներ ամբողջ թվերով

1. (12; 2), (5; 5): **2.** (8; 2): **3.** (1; 26), (3; 24), (5; 20), (17; 14), (9; 6):
4. (1; 23), (2; 10), (3; 5), (4; 2): **5.** Երեք ձևով:
6. Միակ ձևով՝ 4 արկղ 17 կգ-անոց և 2 արկղ 16 կգ-անոց:
7. 15 աքլոր, 1 հավ և 84 ճուտ: **8.** $x = 15$, $y = 22$: **10.** (2;16), (12;6):
11. (16;3), (9;8): **12.** (4;3): **13.** (8;1): **14.** (2;6): **15.** (1;3), (17;3), (6;4), (15;5), (18; 4):
16. $x = y = 3$, $x = y = 1$: **17.** $x = y = z = 1$: **18.** $x = 6,\ y = 5$:
19. $x = 33k + 7,\ y = 14k + 2\ \ (k \in Z)$: **20.** $x = 11k + 5,\ y = -6k - 1\ \ (k \in Z)$:
21. $x = 9k - 1,\ y = -17k + 2\ (k \in Z)$: **22.** $x = 37k - 4,\ y = 23k - 3\ \ (k \in Z)$:
23. (10; 9), (-10; 9), (10; -9), (-10; -9): **24.** (0; 0), (2; 2):
25. (7; 13), (7; -13), (-7; 13), (-7; -13), (11; 5), (11; -5), (-11; 5), (-11; -5):
26. (-25; 17), (7; 1), (25; -17), (-7; -1): **27.** (4; -4), (4; 4), (20; 0):
28. (0; 1), (0; -1): **29.** (2; 5), (-2;-5): **30.** (7; 5), (-7;- 5):
31. (1; -8), (1; -12),(11; -2), (-9; -2), (7; 6), (7; -10), (-5; 6), (-5; -10), (9; 4), (9; -8), (-7; 4), (-7; -8): **32.** (4; 9), (4; -9): **33.** (0; 5), (7;5): **34.** (2; 1): **35.** (1;1) (2;3):
36. (0;0) (-1; 1), (1; 1): **59.** $n = 41$: **60.** 145: **61.** (6;1;0) (6;-1; 0), (0;-1; 0), (0;1; 0):
62. (0;0;0) (1;2;3) (1;3;2), (2;1; 3), (2;3; 1), (3;2;1) (3;1;2):
63. (1;5;0) (1;-5;0), (-1;5; 0), (-1;-5; 0):
64. (0;0;0), (n ;0;0), (0; n ;0), (0;0; n),(n ; n ; n), որտեղ n -ը ցանկացած բնական թիվ է: **65.** $x = 5$, $y = 1$, $z = 3$, $t = 2$: **66.** Ոչ: **67.** 8:
68. Մեկ աշակերտ, 10 միավոր:

§ 5. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը

1. Պնդումը ճիշտ չէ: **21.** $\dfrac{n}{2n+1}$: **22.** $\dfrac{n}{4n+1}$: **23.** $\dfrac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$:

§ 6. Նշանավոր կետեր և գծեր եռանկյան և քառանկյան մեջ

1. ա) Ներքնաձիգի վրա, բ) եռանկյան ներսում, գ) եռանկյունից դուրս:
2. Այո, օրինակ, ուղղանկյուն եռանկյան համար:
6. ա) Այո, բ) ոչ:
8. 96:

9. Այդպիսի կետերը չորսն են. ABC եռանկյան միջնագծերի հատման M կետը և այնպիսի N, P, Q կետեր, որոնց համար $ABCN$, $BCAP$ և $CABQ$-ն զուգահեռագծեր են:

10. 30^0 կամ 150^0:

11. Բութանկյուն եռանկյուն:

12. 2:3 հարաբերությամբ՝ հաշված B գագաթից:

14. 9:10 հարաբերությամբ՝ հաշված B գագաթից:

15. Ավելի մոտ է ամենամեծ կողմին:

19. Ամենամեծ անկյան գագաթին:

22. Ամենամեծ անկյան գագաթին:

23. Ամենափոքր կողմին:

24. Ամենամեծ կողմին տարված բարձրությունը:

25. Ամենամեծ անկյան գագաթին: Ամենամեծ կողմին:

26. Ամենափոքր կողմին տարվածը:

33. 6: **34.** 165^0: **36.** Ոչ: **39.** 1:1: **40.** 1:4: **42.** ա) Ոչ, բ) ոչ, գ) ոչ:

45. 45^0: **52.** 60^0: **53.** $p \cdot R$: **55.** 1: **57.** 90^0: **60.** 10: **61.** 60^0:

69. 0,2: **80.** a^2:

§ 8. Ասույթներ, պնդումներ

1. Սխալ է: **2.** Սխալ է: **3.** Սխալ է: **4.** Ճիշտ է: **5.** Սխալ է: **6.** Ճիշտ է:

7. Սխալ է: **Ցուցում**: Ցանկացած բնական n թվի դեպքում $6^n + 7$ թիվը տասնորդական գրառմամբ վերջանում է 3 թվանշանով:

8. Սխալ է: **9.** Սխալ է:

10. Ճիշտ է: **Ցուցում**: Քանի որ $n + (n+1) + (n+2) = 3(n+1)$, ուստի $n = 3^{100} - 1$ արժեքի դեպքում պնդումը ճշմարիտ է:

11. Սխալ է:

12. Սխալ է: **Ցուցում**: Բավական է դիտարկել միմյանց հաջորդող

$$n!+2,\ n!+3,\ n!+4,\ \ldots,\ n!+10000,\ n!+10001$$

տասը հազար թվերը, որտեղ, $n = 10001$ (հիշենք, որ $n!$ (էն ֆակտորիալ) պայմանանշանը 1-ից մինչև n բնական թվերի արտադրյալի հակիրճ գրելաձևն է):

13. Ճիշտ է: **Լուծում**: Նկատենք, որ $p = 3$ պարզ թվի դեպքում $p + 38 = 41$ և $p + 58 = 61$ թվերը նույնպես պարզ են: Համոզվենք, որ այդ թիվը միակն է: Դժվար չէ նկատել, որ 3-ից տարբեր ցանկացած պարզ թիվ կա՛մ $3k-1$ տեսքի է, կա՛մ $3k+1$ տեսքի, որտեղ $k \in N$:

Երբ $p=3k-1$, ապա $p+58=3(k+19)$, իսկ երբ $p=3k+1$, ապա $p+38=3(k+13)$: Ստացված թվերը, ակնհայտորեն, բաղադրյալ են:

14. Սխալ է: **15.** Սխալ է: **16.** Ճիշտ է: **17.** Սխալ է: **18.** Ճիշտ է:
19. Սխալ է: **20.** Սխալ է:
21. Սխալ է: **22.** Ճիշտ է: **23.** Սխալ է: **24.** Սխալ է: **25.** Սխալ է:
26. Սխալ է: **27.** Ճիշտ է:
28. Սխալ է: **29.** Սխալ է: **30.** Ճիշտ է: **31.** Սխալ է: **32.** Ճիշտ է:
33. Սխալ է: **34.** Ճիշտ է:
35. Սխալ է: **36.** Սխալ է: **37.** Սխալ է: **38.** Սխալ է: **39.** Ճիշտ է:
40. Սխալ է: **41.** Սխալ է:
42 Ճիշտ է: **43.** Ճիշտ է: **44** Ճիշտ է: **45.** Ճիշտ է: **46.** Սխալ է:
47. Ճիշտ է: **48.** Ճիշտ է:
49. Սխալ է **50.** Սխալ է: **51.** ա) Ճիշտ է, բ) սխալ է, գ) սխալ է:
52. Սխալ է: **53.** Ճիշտ է:
54. Ճիշտ է: **55.** Սխալ է: **56.** Ճիշտ է: **57.** Սխալ է: **58.** Սխալ է:
59. Սխալ է: **60.** Սխալ է:
61. Սխալ է: **62.** Սխալ է: **63.** Սխալ է: **64.** Ճիշտ է: **65.** Ճիշտ է:
66. Ճիշտ է: **67.** Սխալ է: **68.** Ճիշտ է: **69.** Սխալ է **70.** Ճիշտ է:
71. Սխալ է: **72.** Սխալ է: **73.** Ճիշտ է: **74.** Ճիշտ է:
75. ա) Ճիշտ է, բ) ճիշտ է, գ) սխալ է: **75.** ա) Սխալ է, բ) ճիշտ է:
76. ա) Սխալ է, բ) ճիշտ է: **77.** Ճիշտ է: **Ցուցում**: Դիտարկել որևէ հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն:
78. ա) Ճիշտ է, բ) սխալ է: **79.** Ճիշտ է: **80.** Ճիշտ է:
81. Սխալ է: **Ցուցում**: Դիտարկել որևէ հավասարասրուն (ոչ հավասարակողմ) եռանկյուն:
82. ա) Ճիշտ է, բ) ճիշտ է: **83.** Ճիշտ է: **84.** Ճիշտ է:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Կորյուն Գարեգինի Առաքելյան
Հայկազն Սարիբեկի Նավասարդյան
Արման Հովհաննեսի Սարգսյան

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ԽՈՐԱՑՎԱԾ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

9-րդ դասարան

Խմբագիր՝ **Կորյուն Առաքելյան**
Կազմի ձևավորումը՝ **Գևորգ Շառոյանի**
Համակարգչային ձևավորումը՝ **Հրայր Շառոյանի**
Համակարգչային շարվածքը՝ **Հասմիկ Առաքելյանի**

Ստորագրված է տպագրության 15.08.2016:
Չափսը՝ 60x84 1/16: Թուղթը՝ օֆսեթ:
Տպագրությունը՝ օֆսեթ: 8 տպ. մամուլ:
Տպաքանակը՝ 200 օրինակ:

«ԳԵՎՈՐԳ - ՀՐԱՅՐ» ՍՊԸ
ԼՈՒՍԱԿՆ
Հրատարակչություն
Երևան, Գրիգոր Լուսավորչի 6:
Հեռ.՝ 52.79.74
էլ. փոստ lusakn@rambler.ru