Մաթեմատիկա /11-12 դասարան/

Խնդիր1: Ցանկացած a_1 , a_2 , b_1 , b_2 թվերի համար տրված են $a_1{}^2 + 2a_1a_2 + 2a_2{}^2 \leq 1009$ և $b_1{}^2 + 2b_1b_2 + 2b_2{}^2 \leq 4036$ պայմանները: Ապացուցել, որ $a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2 \leq 2018$:/3 միավոր/

Լուծում.Ձևափոխենք $a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2 = a_1(b_1 + b_2) + a_2(b_1 + b_2) + a_2b_2 =$

$= (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) + a_2b_2$:

Կիրառենք Կոշու-Բունյակովսկու անհավասարությունը:

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) + a_2b_2 \leq \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + a_2{}^2} \cdot \sqrt{(b_1 + b_2)^2 + b_2{}^2}$$

$$=$$

$$= \sqrt{a_1{}^2 + 2a_1a_2 + 2a_2{}^2} \cdot \sqrt{b_1{}^2 + 2b_1b_2 + 2b_2{}^2} = \sqrt{1009} \cdot \sqrt{4036} = 2018$$

Ապացուցված է:

Խնդիր 2: 1,1 կմ երկարությամբ կլոր լճի ափին մոտ լողում են երկու թառափ. մեկը 500մ/ր հաստատուն արագությամբ և ժամսլաքի ուղղությամբ, մյուսը 600մ/ր արագությամբ՝ հակառակ ուղղությամբ: Լճի ափով վազում է արջը 70մ/ր արագությամբ մոտակա ձկան ուղղությամբ: Քանի՞ լրիվ պտույտ կկատարի արջը 1օր և1 րոպեի ընթացքում: /3 միավոր/:

Լուծում. Տես 9-10-րդ դասարան խնդիր2: Պատասխան՝ 65:

Խնդիր 3: A բնական թվի պոլինդրոմ վերլուծություն կոչվում է A-ի ներկայացումը ՝ $A=a_1+ a_2+\ldots+ a_n$ $(n\geq1)$ տեսքով, որտեղ $a_1= a_n$, $a_2= a_{n-1}$, … , $a_i= a_{n+1-i}$ $(1\leq i\leq n)$: Օրինակ. 16 թվի պոլինդրոմ վերլուծություններ են՝ 16 = 16, 16 = 2+12+2, 16 = 7+1+1+7 և այլն : Գտնել 2018 թվի բոլոր պոլինդրոմ ներկայացումների քանակը: /4 միավոր/

Լուծում: S(A)-ով նշանակենք A թվի պոլինդրոմ ներկայացումների քանակը:

Ապացուցենք, որ $S(2k)=2^k$ մաթ. ինդուկցիայի մեթոդով.

$S(2) = 2^1$:

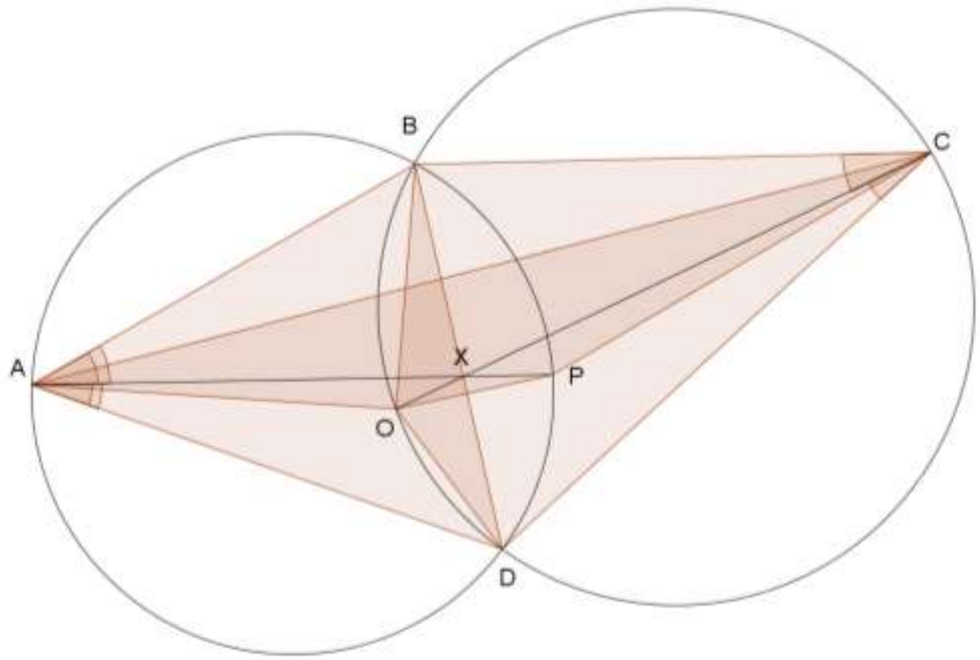
Ենթադրենք $S(2m) = 2^m$, $m<k$ բոլոր դեպքերի համար: Ապացուցենք 2k–ի համար: Դիտարկենք 2k թվի բոլոր պոլինդրոմ վերլուծությունները: Յուրաքանչյուր ներկայացման

առաջին և վերջին գումարելիները հավասար են՝ l<k և քանակը կստացվի 2k-2l թվի վերլուծության քանակով. S(2k-2l) –ի համար ինդուկցիոն ենթադրությունը ճիշտ է , հետևաբար ճիշտ է նաև 2k=k+k, և 2k=2k համար: Այսպիսով

$s(2k)= s(2k-2)+ s(2k-4)+\ldots+ s(2)+2=2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+2^1+2=2^k$:

Պատասխան՝ 2^{1009}:

Խնդիր 4: Ուռուցիկ ABCD քառանկյան համար տրված են հետևյալ պայմանները AB·CD=BC·DA և 2∠A+∠C=180^0: ABD եռանկյանն արտագծած շրջանագծի A կետը չպարունակող BD աղեղի միջնակետը P-ն է, ընդ որում P կետն ընկած է ABCD քառանկյան ներքին տիրույթում: Ապացուցել, որ ∠BCA=∠DCP:/5 միավոր/



Լուծում. Նշանակենք ∆ABD –ին արտագծած շրջանագիծը՝ $\omega_1(O, AO)$: Քանի որ ∠BOD=2∠A հետևաբար ∠BOD + ∠BCD =180^0 հետևաբար BODC քառանկյան արտագծվում է ω_2 շրջանագիծ: Քանի որ BO=OD հետևաբար O-ն BD աղեղի միջնակետն է և հետևաբար CO-ն ∠BCD-ի կիսորդն է:

Ըստ պայմանի P-ն ω_1 շրջանի BD աղեղի միջնակետն է, հետևաբար AP-ն ∠BAD-ի կիսորդն է.

Նշանակենք՝ AP ∩ BD ≡ X: Ըստ կիսորդի հատկության՝ $\frac{BX}{XD} = \frac{BA}{AD}$

Նշանակենք՝ CO ∩ BD ≡ X′: Ըստ կիսորդի հատկության $\frac{BX'}{X'D} = \frac{BC}{CD}$

Ըստ պայմանի AB·CD=BC·DA, հետևաբար

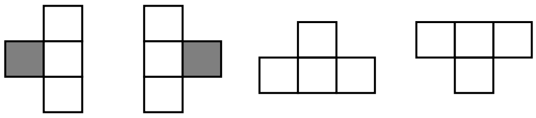
$$\frac{BX'}{X'D} = \frac{BX}{XD} \Rightarrow \ X = X' :$$

Մյուս կողմից ω_1 շրջանից AX·XP=BX·XD և ω_2 շրջանից CX·XO=BX·XD (ռադիկալ առանցքի կետերի աստիճանները հավասար են) հետևաբար AX·XP=CX·XO հետևաբար A,P,O,C կետերը ընկած են նույն շրջանագծի վրա և քանի որ AO=OP և հավասար լարերի վրա հենված աղողները հավասար են, հետևաբար ∠ACO=∠OCP և

$$\left.\begin{array}{l}\angle BCA = \angle BCO - \angle ACO \\ \angle PCD = \angle OCD - \angle OCP\end{array}\right| \Rightarrow \angle BCA = \angle PCD$$

Պատասխան՝ ապացուցված է։

Խնդիր 5: 600x600 չափերով քառակուսին բաժանված է 4 վանդակներով պատկերների՝



Առաջին 2 տիպի պատկերների ներկված վանդակների մեջ գրված է 2^k թիվը, որտեղ k-ն այն սյուների համարն է, որում դրված է այդ պատկերը։ Ապացուցել, որ գրված բոլոր թվերի գումարը բաժանվում է 9-ի։ /5 միավոր/

Լուծում. Տես 9-10-րդ դասարան խնդիր5։