Մաթեմատիկա /9-10 դասարան/

Խնդիր1: Դիցուք x_1, x_2, x_3, x_4 -ը $x^4 - 2^{2017}x^2 + 49 = 0$ հավասարման իրարից տարբեր արմատներ են՝ $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$: Հաշվել $-\frac{(7+x_1)(7+x_3)}{(1+x_2)(1+x_4)}$: /3 միավոր/

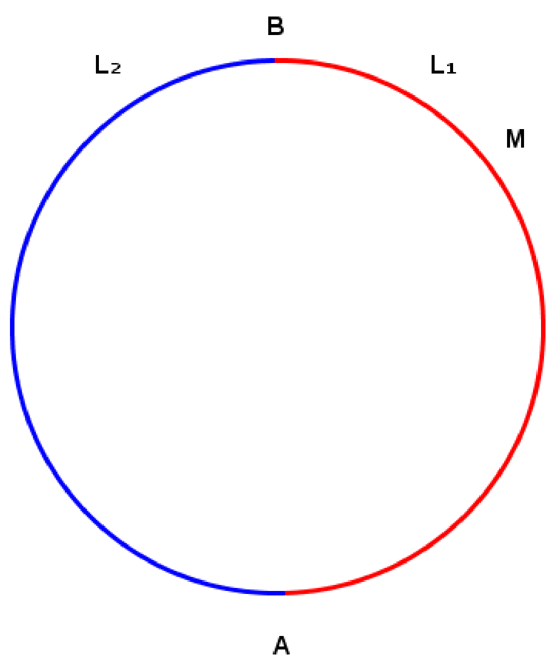
Լուծում: Նշանակենք $t = x^2$ և t_1, t_2 –ը $t^2 - 2^{2017}t + 49 = 0$ հավասարման արմատներն են ընդ որում. $t_1 < t_2$: Այդ դեպքում $x_1 = -\sqrt{t_2}, x_2 = -\sqrt{t_1}, x_3 = \sqrt{t_1}$ և $x_4 = \sqrt{t_2}$: Ըստ Վիետի թեորեմի $t_1 \cdot t_2 = 49$:

Տեղադրելով արտահայտության մեջ կստանանք՝ $-\frac{(7+x_1)(7+x_3)}{(1+x_2)(1+x_4)} = 7$:

Պատասխան՝ 7:

Խնդիր2: 1 կմ երկարությամբ կլոր լճի ափին մոտ լողում են երկու թառափ. մեկը 500մ/ր հաստատուն արագությամբ և ժամսլաքի ուղղությամբ, մյուսը 750մ/ր արագությամբ՝ հակառակ ուղղությամբ: Լճի ափով վազում է արջը 200մ/ր արագությամբ մոտակա ձկան ուղղությամբ:Քանի՞ լրիվ պտույտ կկատարի արջը 1ժամվա ընթացքում:/3 միավոր/:

Լուծում



Թող L₁ և L₂-ը լինի թառափների դիրքը ժամանակի որևէ պահին, M-ը արջի դիրքն է: Ներմուծենք օգնող A և B կետեր , որոնք լճի ափին կիսում են թառափների միջև մեծ և փոքր աղեղները,այսինքն A և B-ն տրամագծորեն հակադիր կետեր են և շրջանը բաժանում է 2 կիսաշրջանների: Նրանցից մեկը անվանենք կարմիր, մյուսը՝ կապույտ : Ցույց տանք, որ եթե արջը սկզբնական պահին գտնվում է կարմիր կիսաշրջանում, ապա նա կգտնվի այնտեղ ամբողջ ժամանակ:

A և B կետերը շարժվում են ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ (750-500)/2=125մ/ր: Նրանց արագությունը փոքր է արջի արագությունից: Այս դեպքում եթե արջը վազում է A կետից, ապա A կետը չի հասնի նրան: Որպեսզի հայտնվի կապույտ կիսաշրջանում արջը պետք է վազի A կետի ուղղությամբ (կամ B կետի ուղղությամբ) և անցնի այդ կետը:

Տրված գծագրում արջը վազում է A կետից L_1 թառափի ուղղությամբ, այսինքն B կետին: Եթե L_1 լողում է արջին ընդառաջ, ապա արջը կհանդիպի L_1-ին , կփոխի ուղղությունը չհասնելով B կետը: Եթե L_1 լողում է արջից ուրեմն L_1 կհայտնվի B կետում ավելի շուտ քան արջը , քանի որ, L_1-ի արագությունը մեծ է, քան արջինը: Այս դեպքում B կետին ընդառաջ գնալով արջը կվազի L_2-ի ուղղությամբ, և երբ արջը կհանդիպի L_2-ին կփոխի ուղղությունը: Այս ձևով, արջը ցանկացած դեպքում կփոխի իր ուղղությունը չհասնելով B կետին: Նմանատիպ դատողություններ անելով կստանանք, որ նա կփոխի ուղղությունը չհասնելով A կետը:

Այս ձևով արջը երբեք չի անցնի կարմիր կիսաշրջանի եզրերը, նշանակում է միշտ կգտնվի նրա մեջ: 1 ժամվա ընթացքում A և B կետերը կտեղաշարժվեն 125· 60 մետր , այսինքն կանի 125·60/1000=7,5 պտույտ լճի շուրջը: Հետևաբար, արջը կանի 7-ից շատ, բայց 8-ից քիչ պտույտ , իսկ սա նշանակում է լրիվ պտույտը կլինի 7:

Պատասխան՝ 7:

Խնդիր3 Լուծել հավասարումն ամբողջ թվերի բազմությունում. $x^2-2y^2=2^{x+y}$**:/4 միավոր/**

<u>Լուծում:</u> Քանի որ հավասարման ձախ մասն ամբողջ թիվ է, ապա աջ մասը ևս ամբողջ է, հետևաբար x+y≥0:

Եթե x+y>0, ապա հավասարման աջ մասը զույգ է, հետևաբար ձախը ևս պետք է լինի զույգ, հետևաբար $x=2x_1$, $x_1 \in Z$: Տեղադրելով հավասարման մեջ կստանանք.

$$4x_1^2-2y^2=2^{2x_1+y} => 2x_1^2-y^2=2^{2x_1+y-1} \quad (1)$$

Եթե (1) հավասարման աջ մասի աստիճանը նորից մեծ է 0, ապա $y=2y_1$: Տեղադրելուց և կրճատելուց հետո կստանանք . $x_1^2-2y_1^2=2^{2x_1+2y_1-2}$: Այս գործընթացը շարունակվում է այնքան մինչև աջ մասի աստիճանը դառնա 0:

Քննարկենք 2 դեպք.

1. Աստիճանը զրոյանում է զույգ թվով քայլերից հետո: Դիցուք 2k կրճատում է կատարվել: Այդ դեպքում $x=2^k \cdot r$, $y=2^k \cdot s$ և կստանանք.

$$r^2-2s^2=2^{2^k r+2^k s-2k}$$

քանի որ աստիճանը 0 է կստանանք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} r^2 - 2s^2 = 1 \\ 2^k(r+s) = 2k \end{cases}$$

Երկրորդ հավասարումից կստանանք k=0, k=1 կամ k=2:

Երբ k=0 համակարգը լուծում չունի:

Երբ k=1 և k=2 կստանանք նույն համակարգը r և s-ի համար

$$\begin{cases} r^2 - 2s^2 = 1 \\ r + s = 1 \end{cases}$$

(r;s)=(1;0), (3;-2), որը տալիս է սկզբնական հավասարման 4 լուծում՝

(x;y)=(2;0), (6;-4); (4;0), (12;-8):

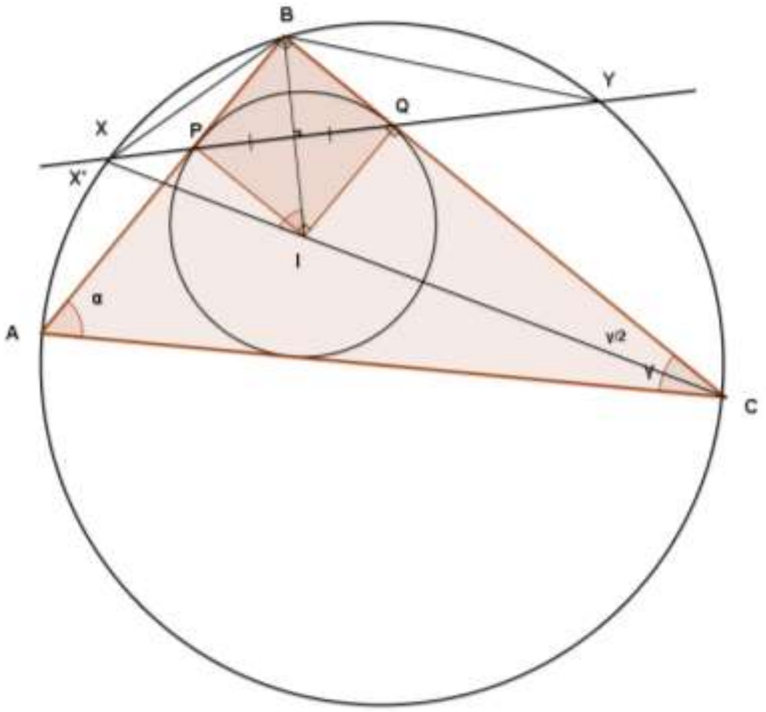
2. Դիցուք $x=2^k \cdot r$ և $y=2^{k-1} \cdot s$, այդդեպքում կստանանք.

$$\begin{cases} 2r^2 - s = 1 \\ 2^{k-1}(2k+s) = 2k - 1 \end{cases}$$

Համակարգի երկրորդ հավասարումից պարզ է, որ k=1 և համակարգը կունենա միակ (r;s)=(1;-1) լուծումը => (x,y)=(2;-1)

Պատասխան՝ (2;0), (6;-4), (4;0), (12;-8), (2, -1):

Խնդիր4: Եռանկյան ներգծած շրջանագիծը շոշափում է AB և BC կողմերը P և Q կետերը, PQ ուղիղը հատում է ABC եռանկյան արտագծած շրջանագիծը X և Y կետերը: Գտնել ∠XBY-ը, եթե ∠ABC =90^0: /5 միավոր/



Լուծում. Որոշակիության համար ասենք $X \in AB$, $Y \in BC$: Նշանակենք ներգծած շրջանագծի կենտրոնը I և $\angle ABC = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$:

Քանի որ IPBQ քառանկյունը քառակուսի է, PQ ուղիղը հանդիսանում է BI-ի միջնուղղահայաց: Վերցնենք AB աղեղի X' միջնակետը՝ $X' \in CI$ կիսորդին, հետևաբար .

$$\angle X'IB = \angle ICB + \angle IBC = 45^0 + \frac{\gamma}{2} \quad \text{և} \quad \angle X'BI = \angle X'BA + \angle ABI = \angle X'CA + \angle ABI = \frac{\gamma}{2} + 45^0$$

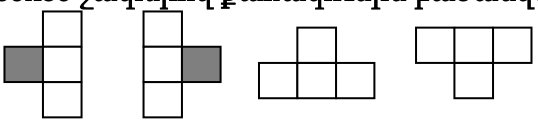
Այսպիսով $\angle X'IB = \angle X'BI$, որտեղից X'I=X'B : Հետևաբար X' կետը ընկած է BI հատվածի միջնուղղահայացի վրա, հետևաբար $X' \equiv X$ և $\angle XBI = \frac{\gamma}{2} + 45^0$:

Նույն կերպ $\angle YBI = \frac{\gamma}{2} + 45^0$, հետևաբար

$\angle XBY = \angle XBI + \angle YBI = \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} + 90^0 = 135^0$:

Պատասխան 135^0:

Խնդիր 5: 60x60 չափերով քառակուսին բաժանված է 4 վանդակներով պատկերների՝



Առաջին 2 տիպի պատկերնրի ներկված վանդակների մեջ գրված է 2^k թիվը, որտեղ k-ն այն սյուների համարն է, որում դրված է այդ պատկերը: Ապացուցել, որ գրված բոլոր թվերի գումարը բաժանվում է 9-ի: /5 միավոր/

Լուծում: 60x60 քառակուսու բոլոր վանդակների մեջ գրենք իրենց համապատասխան թվերը՝

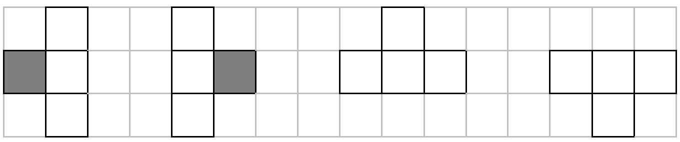
2^1	2^2					2^{60}
2^1	2^2					2^{60}
2^1	2^2					2^{60}
2^1	2^2					2^{60}

a	2a	4a	8a	16a	32a

Յուրաքանչյուր տողի 1x6 ուղղանկյան թվերի գումարը կբաժանվի 9-ի:

Իրոք՝   a+2a+4a+8a+16a+32a=63a ⋮ 9:

Քանի, որ ամբողջ քառակուսին կարելի է բաժանել այդպիսի 1x6 չափանի ուղղանկյունների, հետևաբար բոլոր թվերի գումարը կբաժանվի 9-ի:



(1) (2) (3) (4)

(1) և (2) պատկերներին անվանենք ուղղահայաց, (3) և (4) պատկերներին

հորիզոնական: Հորիզոնական (3) և (4) պատկերների թվերի գումարը՝

	2a						
a	2a	4a			a	2a	4a
						2a	

a+2a+2a+4a=9a բաժանվում են 9-ի, հետևաբար

ուղղղահայաց պատկերների թվերի գումարը ևս

բաժանվում է 9-ի:

Նշանակենք ուղղահայաց վանդակների թվերի գումարը S, իսկ ներկված վանդակների թվերի գումարը C:

Դիցուք x քանակով օգտագործվել է՝

	2a
a	2a
	2a

a+2a+2a+2a=7a:

y քանակով օգտագործվել է՝

a/2	
a/2	a
a/2	

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+a=\frac{5a}{2}:$$

2S=14ax+5ay=9ax+5a(x+y)

C=x+y,

Քանի որ S ⋮ 9 => 5a(x+y) ⋮ 9, a-ն 9-ի չի բաժանվում, հետևաբար C ⋮ 9 :

Պատասխան՝ ապացուցված է: