ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
(ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ)

ԵՐԵՎԱՆԻ ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ

Polytechnic High School of Yerevan

ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՄԻՋՎԱՐԺԱՐԱՆԱՅԻՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

X ԴԱՍԱՐԱՆ

ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

1. (3 միավոր) Յուրաքանչյուր զուգահեռագիծ առաջանում է m զուգահեռ ուղիղներից որևէ երկուսի և k զուգահեռ ուղիղներից որևէ զույգի հատումից:

Քանի որ m ուղիղներից կարելի է ընտրել $\dfrac{m(m-1)}{2}$ զույգ, իսկ k ուղիղներից՝ $\dfrac{k(k-1)}{2}$ զույգ, ուստի բոլոր զուգահեռագծերի քանակը կլինի՝ $\dfrac{k(k-1)}{2}\cdot\dfrac{m(m-1)}{2}$, այսինքն՝ $\dfrac{mk(m-1)(k-1)}{4}$:

Պատասխան՝ ա) 18, բ) 100, գ) $\dfrac{mk(m-1)(k-1)}{4}$:

2. (4 միավոր) Յուրաքանչյուր գումարելին $\sqrt[k+1]{\dfrac{k+1}{k}}$ տեսքի է, որտեղ $k=1,2,\ldots,99$:

Օգտվելով Կոշիի անհավասարությունից , կարող ենք գրել ՝

$$\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}}=\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1}_{k}}<\frac{\dfrac{k+1}{k}+k}{k+1}=1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

Դրանով իսկ կունենանք՝

$$\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}}<1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}:$$

Մնում է տեղադրել $k=1,2,\ldots,99$, ապա գումարել ստացված անհավասարություններր:

3. (4 միավոր) Սկզբում ընտրենք, օրինակ, $1,2,3,\ldots,2016$ թվերը: Հայտնի է, որ ցանկացած $n\in N$ դեպքում $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

Այդ բանաձևի շնորհիվ՝

$$1^2+2^2+\ldots+2016^2=336\cdot2017\cdot4033:$$

Դժվար չէ համոզվել, որ $336 \cdot 2017 \cdot 4033 = a$ թիվը կարելի է ներկայացնել $k^2 - m^2$ տեսքով $\left(k, m \in N\right)$: Իրոք բավական է վերցնել, օրինակ $k - m = 2$ և $k + m = \dfrac{a}{2}$:

Այդ դեպքում կունենանք՝ $k = \dfrac{a}{4} + 1$, $m = \dfrac{a}{4} - 1$ $\left(\dfrac{a}{4} \in Z\right)$, ընդ որում՝ $\dfrac{a}{4} - 1 > 2016$

Այսպիսով՝

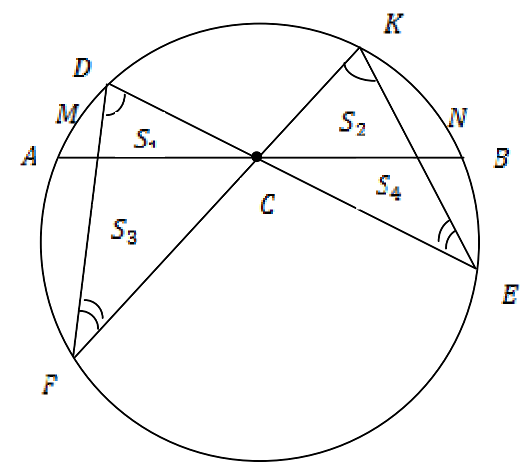
$$1^2 + 2^2 + \ldots + 2016^2 = \left(\frac{a}{4} + 1\right)^2 - \left(\frac{a}{4} - 1\right)^2,$$

որտեղից՝

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 2016^2 + \left(\frac{a}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{a}{4} + 1\right)^2, \text{ որտեղ } a = 336 \cdot 2017 \cdot 4033:$$

Վերջին հավասարությունն էլ հիմնավորում է խնդրի պնդումը:

4. (4 միավոր)



$\angle D = \angle K$, $\angle F = \angle E$ $\Rightarrow$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{DM \cdot DC}{KC \cdot KN}, \quad \frac{S_3}{S_4} = \frac{FM \cdot FC}{EC \cdot EN} \Rightarrow$$

$$\frac{S_1 S_3}{S_2 S_4} = \frac{DM \cdot DC \cdot FM \cdot FC}{KC \cdot KN \cdot EC \cdot EN} \quad (1)$$

Քանի որ $\angle DCM = \angle ECN$, $\angle FCM = \angle KCN$,

ուստի $\dfrac{S_3}{S_2} = \dfrac{CM \cdot FC}{CN \cdot KC}$, $\dfrac{S_1}{S_4} = \dfrac{DC \cdot CM}{EC \cdot CN}$ $\Rightarrow$

$$\frac{S_1 S_3}{S_2 S_4} = \frac{CM \cdot FC \cdot DC \cdot CM}{CN \cdot KC \cdot EC \cdot CN}: \quad (2)$$

(1) և (2) հավասարություններից կստանանք՝

$$\frac{DM \cdot FM}{KN \cdot EN} = \frac{CM^2}{CN^2}: \quad (3)$$

Նշանակենք՝ $AC = CB = a$, $CM = x$, $CN = y$:

Օգտվելով հատվող լարերի վերաբերյալ թեորեմից, (3)-ը կներկայացնենք այսպես՝

$$\frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)}=\frac{x^2}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}=\frac{x^2}{y^2} \quad \Rightarrow \quad x=y \quad \Rightarrow \quad CM=CN:$$

5. **(5 միավոր)** Ամենից առաջ նկատել, որ երկու բնական թվերի գումարը և տարբերությունը զույգությամբ համընկնում են: Քանի որ գրատախտակի վրա պետք է մնա միայն 0 թիվը, ուստի $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$-ը պետք է զույգ լինի: Դժվար չէ նկատել, որ միայն $n=4k$ և $n=4k-1$ $(k \in N)$ դեպքում է, որ այն զույգ թիվ է:

Նկատենք, որ դիտարկվող քայլերի միջոցով իրար հաջորդող չորս բնական թվերից անմիջապես կարելի է ստանալ 0 (համոզվեք դրանում):

ա) $1,2,3,4,\ldots,4k-3,4k-2,4k-1,4k$ թվերը բաժանելով իրար հաջորդող քառյակների, կստանանք k հատ 0-ներ, որոնցից էլ կունենանք միայն մեկ 0:

բ) $1,2,3,4,\ldots,4k-4,4k-3,4k-2,4k-1$ թվերը, սկսած 4-ից, քառյակների միջոցով կստանանք 0-ներ, այնուհետև $1,2,3$ թվերի միջոցով ևս հեշտությամբ կստանանք 0:

Պատասխան՝ $n=4k$ **,** $n=4k-1$ **,** որտեղ $k \in N$

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
(ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ)

ԵՐԵՎԱՆԻ ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ

ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՄԻՋՎԱՐԺԱՐԱՆԱՅԻՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
XI ԴԱՍԱՐԱՆ
ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

1. **(4 միավոր)** Սկզբում ապացուցել, որ ցանկացած $k \in N$ դեպքում

$$2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}:$$

Այնուհետև տեղադրելով $k = 2,3,\ldots,10000$, ապա գումարել ստացված անհավասարությունները:

Պատասխան՝ 198:

2. **(4 միավոր)** Ամենից առաջ նկատել, որ եթե $a+b=1$, ապա $f(a)+f(b)=1$:

Այդ նկատառումով կստանանք՝

$$\left(f\left(\frac{1}{1000}\right)+f\left(\frac{999}{1000}\right)\right)+\left(f\left(\frac{2}{1000}\right)+f\left(\frac{998}{1000}\right)\right)+\ldots+\left(f\left(\frac{499}{1000}\right)+f\left(\frac{501}{1000}\right)\right)+f\left(\frac{500}{1000}\right)=$$

$$=499+f\left(\frac{1}{2}\right)=499,5$$

Պատասխան՝ $499,5$ **:**

3. **(4 միավոր)** ա) Ստուգելով համոզվում ենք, որ $n = 1,2,3,\ldots,9$ թվերից յուրաքանչյուրի դեպքում ստացվում են պարզ թվեր: Այնուհետև նկատել, որ իրար հաջորդող 9-ից ավելի անդամներ չեն կարող լինել պարզ թվեր: Բավական է նկատել, որ

$$n = 11k, n = 11k+1, \ldots, n = 11k+9, n = 11k+10 \quad (k \in N)$$

համարներով իրար հաջորդող ցանկացած 11 անդամներից ամենաքիչը երկուսը բաղադրյալ են ($n = 11k$ և $n = 11k+10$ դեպքերում): Նշանակում է ամենաշատը 9-ը կարող են լինել պարզ:

բ) Նշանակենք՝ $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = l$ և դիտարկենք տրված հաջորդականության $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_{l+100}$ անդամները: Այդ թվերից յուրաքանչյուրը բաղադրյալ է, քանի որ

$$x_{l+k} = (l+k)^2 + (l+k) + 11 = (l^2 + 2kl + l) + (k^2 + k + 1) = l(l+2k+1) + x_k \quad (k = 1,2,\ldots,100),$$

որից հետևում է, որ $x_{l+k} \vdots x_k$: Հետևաբար, վերոնշյալ բոլոր հարյուր անդամները բաղադրյալ են:

Պատասխան՝ ա) 9 **,** բ) այո՛, հնարավոր է:

4. **(3 միավոր)** ա) Այո՛, հնարավոր է: Օրինակ,

$$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=4$$

հավասարումով տրվող շրջանագիծը: Այն անցնում է $\left(0;0\right)$ կետով: Դժվար չէ համոզվել, որ այդ հավասարման ռացիոնալ թվերով միակ լուծումը $\left(0;0\right)$-ն է:

բ)) Այո՛, հնարավոր է: Հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ

$$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2=6$$

շրջանագիծը պարունակում է ճիշտ երկու ռացիոնալ կոորդինատներով կետ ($\left(1;1\right)$ և $\left(-1;-1\right)$):

5. **(5 միավոր)** Այդ կետը A, B, C, D, E կետերի ցենտրոիդն է, այսինքն՝ այն M կետն է, որի դեպքում՝

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{O}:$$

Հենց M ցենտրոիդն է, որ պատկանում է նշված բոլոր հատվածներին:

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
(ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ)

ԵՐԵՎԱՆԻ ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ

ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՄԻՋՎԱՐԺԱՐԱՆԱՅԻՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

XII ԴԱՍԱՐԱՆ

ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

1. **(4 միավոր)** Նկատել, որ

$$a_n > n\cdot\frac{1}{n^2+n}+(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{2}{n+1} \quad \text{և}$$

$$a_{n+1} < (n+1)\frac{1}{(n+1)^2}+(n+2)\frac{1}{(n+1)^2+(n+2)} < \frac{1}{n+1}+\frac{n+2}{(n+1)(n+2)}=\frac{2}{n+1}:$$

Հետևաբար՝

$$a_n > a_{n+1} \quad (\forall n\in N) \ :$$

2. **(3 միավոր)** Դիցուք, A կետի կոորդինատներն են՝ $A(r_1,r_2,r_3)$: Դժվար չէ համոզվել, որ $(r_1+\sqrt{2},r_2+\sqrt{2},r_3+\sqrt{2})$ կենտրոնով և $R=\sqrt{6}$ շառավղով գնդային մակերևույթը պարունակում է A կետը և, բացի այդ, ռացիոնալ կոորդինատներով այլ կետ չունի:

Պատասխան՝ այո՛:

3. **(4 միավոր)** Ամենից առաջ նկատել, որ եթե $a+b=1$, ապա $f(a)+f(b)=1$:

Այդ նկատառումով կստանանք՝

$$\left(f\left(\frac{1}{1000}\right)+f\left(\frac{999}{1000}\right)\right)+\left(f\left(\frac{2}{1000}\right)+f\left(\frac{998}{1000}\right)\right)+\ldots+\left(f\left(\frac{499}{1000}\right)+f\left(\frac{501}{1000}\right)\right)+f\left(\frac{500}{1000}\right)=$$

$$=499+f\left(\frac{1}{2}\right)=499{,}5$$

Պատասխան՝ $499{,}5$:

4. **(4 միավոր)** Ամենից առաջ նկատել, որ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}=2+\sqrt{3}$:

Հետևաբար,

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n}=\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}-\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}\right)^{2}+2\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}=\left(\sqrt{3}q\right)^{2}+2=$$

$$=3q^{2}+2=\left(q-1\right)^{2}+q^{2}+\left(q+1\right)^{2},$$ որտեղ $q\in Z$:

Այստեղ մենք օգտվեցինք Նյուտոնի երկանդամի բանաձևից:

5. **(5 միավոր)** Ակնհայտ է, որ $OABC, OABD, OBCD, OACD$ բուրգերի ծավալների գումարը հավասար է տրված քառանիստի ծավալին:

Նշանակենք այդ ծավալները համապատասխանաբար V_1, V_2, V_3, V_4, V:

Ունենք՝ $\dfrac{V_1}{V}+\dfrac{V_2}{V}+\dfrac{V_3}{V}+\dfrac{V_4}{V}=1$: Այնուհետև նկատենք, որ

$$\frac{V_1}{V}\geq\frac{r}{DD_1},\quad \frac{V_2}{V}\geq\frac{r}{CC_1},\quad \frac{V_3}{V}\geq\frac{r}{AA_1},\quad \frac{V_4}{V}\geq\frac{r}{BB_1}:$$

Այսպիսով՝

$$\frac{r}{AA_1}+\frac{r}{BB_1}+\frac{r}{CC_1}+\frac{r}{DD_1}\leq 1: \quad (1)$$

Մյուս կողմից, $\left(a+b+c+d\right)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)\geq 16 \quad \left(a,b,c,d>0\right)$ անհավասարության շնորհիվ կունենանք՝

$$\left(AA_1+BB_1+CC_1+DD_1\right)\left(\frac{r}{AA_1}+\frac{r}{BB_1}+\frac{r}{CC_1}+\frac{r}{DD_1}\leq 1\right)\geq 16\cdot r:$$

Հաշվի առնելով (1)-ը, կստանանք՝

$$AA_1+BB_1+CC_1+DD_1\geq 16\cdot r:$$